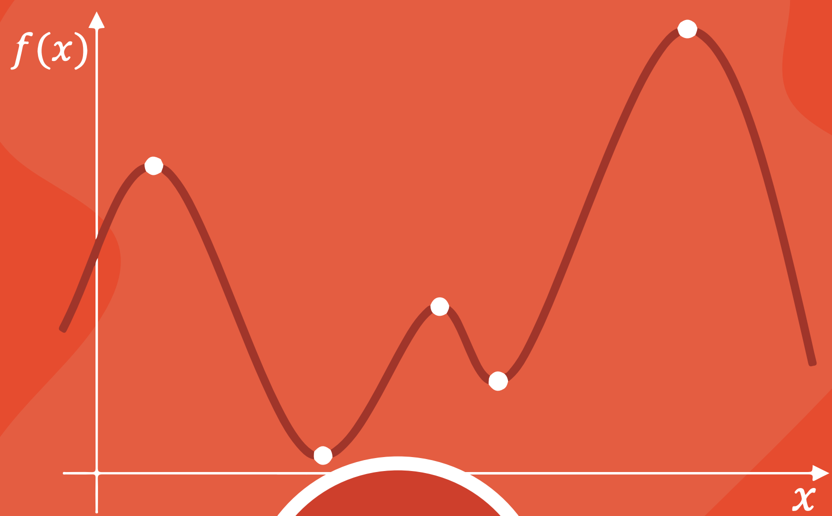
UNIVERSIDAD DE TALCA CHILE



MÁXIMOS Y MÍNIMOS

MATEMÁTICA

Vicerrectoría de Pregrado
CIVE Dirección de Ciclo de Vida Estudiantil
CIMA Unidad de Acompañamiento Estudiantil
PACE Programa de Acceso a la Educación Superior
Ministerio de Educación

APRENDIZAJE ESPERADO

Optimizar funciones de variable real definidas en intervalos cerrados.

RUTA DE APRENDIZAJE

Cálculo → Derivadas → Máximos y mínimos

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Al realizar algún procedimiento es normal intentar optimizarlo, por ejemplo, si tenemos que llegar a cierto lugar, es lógico escoger la ruta más corta para demorarnos lo menos posible. En este ejemplo se desea minimizar tanto la distancia a recorrer como el tiempo de viaje. Por otra parte, si fuésemos propietarios de una PYME quisiéramos minimizar los costos de producción, y de esta manera maximizar los ingresos o utilidades.

La optimización en el mundo de la matemática es un tema muy estudiado. Supón que nos dan una función f y su dominio S, quisiéramos saber si f alcanza un valor máximo o mínimo en S. Si tales valores existen, ¿qué elementos del dominio arrojan estos valores? y por último ¿cómo calcular máximos o mínimos? Intentaremos encontrar la respuesta a estas cuestiones a continuación.

Definición (Purcell & Varberg, 1992)

Sea c un punto del dominio de S de f. Decimos que:

i. $f(c)$ es el **valor máximo** de f en S si $f(c) \geq f(x)$ para todo x que pertenezca a S.

ii. $f(c)$ es el **valor mínimo** de f en S si $f(c) \leq f(x)$ para todo x que pertenezca a S.

iii. $f(c)$ es un **valor extremo** de f en S si es un máximo o mínimo.

Además, el siguiente teorema nos ayudará a saber si una función posee máximo o mínimo

Teorema (Purcell & Varberg, 1992)

(Teorema de la existencia de máximos o mínimos). Si f es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, entonces f tiene un valor máximo y un valor mínimo allí.

Para dar respuesta a la **pregunta ¿dónde se presentan los valores extremos?** diremos que usualmente se presentan en los puntos frontera en caso de que la función sea definida en un intervalo cerrado $[a,b]$. Otra opción es que se presenten en aquellos puntos llamados **puntos estacionarios**, que cumplen $f'(c)=0$ con $c \in [a,b]$ y finalmente en aquellos valores del dominio de f para los cuales la derivada $f'(c)$ no existe, estos últimos se denominan **puntos singulares.** El siguiente teorema resume lo dicho anteriormente.

Teorema (Purcell & Varberg, 1992)

(Teorema del punto crítico). Sea f definida en un intervalo I tal que contiene al punto c. Si $f(c)$ es un valor extremo, entonces c debe ser un punto crítico; es decir, tendrá que ser uno de los 3 casos siguientes:

i. Un punto frontera de I.

ii. Un punto estacionario de f, es decir, $f'(c)=0$.

iii. Un punto singular de f en el que $f'(c)$ no existe.

En vista de los **teoremas** anteriores, podemos establecer ahora **un procedimiento** muy simple para encontrar los valores **máximos o mínimos** de una función **continua f** en un intervalo **cerrado I**.

Paso 1 Encuentre los puntos críticos de f sobre I.

Paso 2 Evalúe f para cada uno de esos puntos críticos. El mayor de esos valores es el máximo; el menor, el mínimo.

EJERCICIOS RESUELTOS

1) Si se sabe que la función $f(x) = x^{2/3}$ es continua en toda en toda su extensión, encuentre los valores máximos y mínimos en el intervalo [-1,2].

Resolvamos aplicando los dos pasos propuestos más arriba.

Paso 1: calculemos los puntos críticos de la función.

Por teorema ya sabes que los valores frontera son posibles valores críticos así que solo nos falta derivar para ver si existen puntos estacionarios o singulares. Derivemos

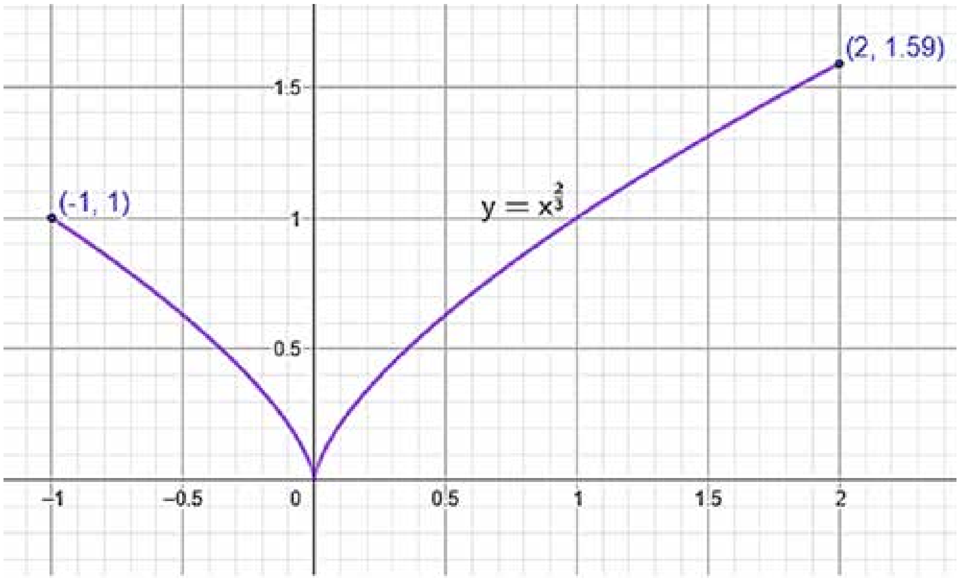
$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}$$
$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$
$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

Al analizar la derivada es posible ver que esta no se hace cero para ningún valor de x, es decir la función no tiene puntos estacionarios. Por otra parte, la derivada no está definida para x=0 pues se anula el denominador, así que hemos encontrado un punto singular.

Paso 2: evaluemos la función en los extremos y en el punto singular.

$$f(-1) = (-1)^{\frac{2}{3}} = 1$$
$$f(0) = 0^{\frac{2}{3}} = 0$$
$$f(2) = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4} \approx 1,59$$

Por lo tanto, el valor máximo es $\sqrt[3]{4}$ y el mínimo es 0. La gráfica de la función se muestra en la siguiente figura.



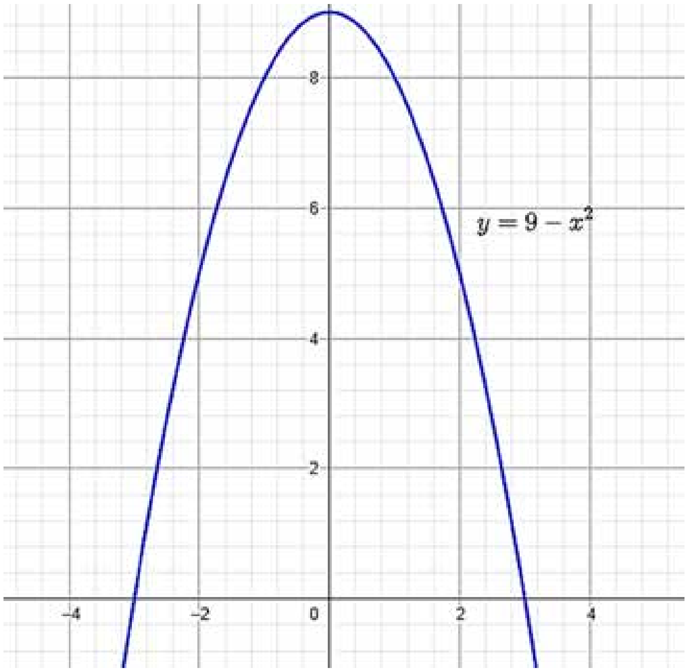
2) Determine los valores extremos de la función $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ en el intervalo [-3,3].

Paso 1: calculemos los puntos críticos de la función

Antes de derivar estudiemos el dominio de esta función. Puesto que se trata de una raíz de índice par, en este caso índice 2, el radicando no puede ser negativo, en inecuaciones esto es

$$9 - x^2 \geq 0$$

Veamos cómo es la gráfica de la función $g(x) = 9 - x^2$



De la imagen se aprecia que para valores entre -3 y 3, ambos inclusive, la gráfica se encuentra en el primer y segundo cuadrante, o sobre el eje X, lo cual significa precisamente que en el intervalo $[-3,3]$, se cumple que $9 - x^2 \geq 0$. Concluimos entonces que el intervalo $[-3,3]$ corresponde a todo el dominio de la función $f(x)$ definida en el enunciado del ejercicio. Ahora derivemos

$$f'(x) = \frac{1}{2}(9 - x^2)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (9 - x^2)'$$
$$f'(x) = \frac{1}{2(9 - x^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot (-2x)$$
$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$$

Para calcular los puntos estacionarios basta resolver la ecuación $f'(x) = 0$, o sea

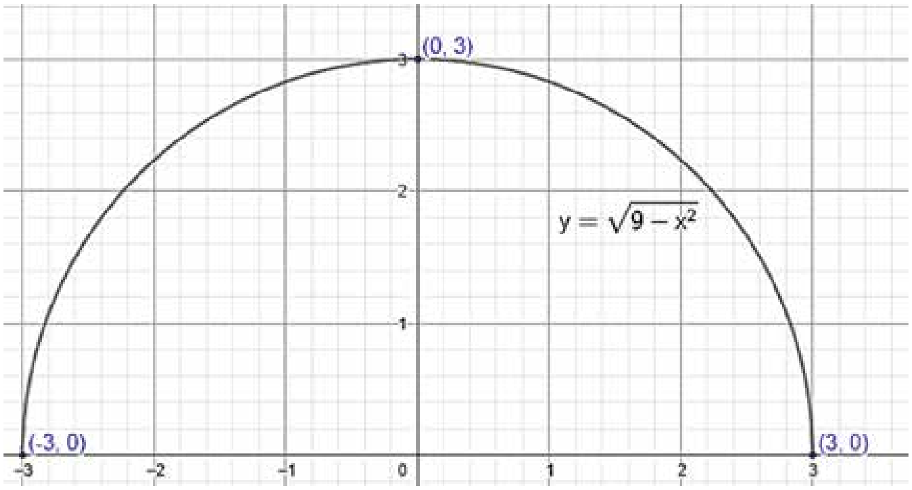
$$-\frac{x}{\sqrt{9 - x^2}} = 0$$

Cuya solución es $x = 0$. Por otra parte, vemos que la función tiene dos puntos singulares, uno en $x = -3$ y el otro en $x = 3$ porque en ambos la derivada se indefine. En conclusión, tenemos un punto estacionario y dos singulares (que coinciden con los extremos del intervalo).

Paso 2: evaluemos la función en los extremos y en el punto estacionario.

$$f(-3) = \sqrt{9 - (-3)^2} = 0$$
$$f(0) = \sqrt{9 - 0^2} = 3$$
$$f(3) = \sqrt{9 - (3)^2} = 0$$

Podemos decir que el valor máximo de la función es 3, y su mínimo es 0. Los resultados los podemos comprobar en la gráfica de la función



EJERCICIOS PROPUESTOS

Recomendación: para resolver la ecuación $f'(x) = 0$, factorice al máximo $f'(x)$, de esta forma suele ser más simple encontrar las soluciones.

Calcule los valores máximos y mínimos de f sobre el intervalo dado.

1) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ en $[-3,3]$.
2) $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ en $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$.
3) $f(x) = xe^x$ en $[0,2]$.

Soluciones

1) Puntos críticos son -3, -1, 0, 1. Además $f(-3) = 66$, $f(-1) = 2$, $f(0) = 3$ y $f(1) = 2$. Es decir, el valor máximo es 66 y el mínimo es 2.
2) Puntos críticos son $-\frac{1}{2}$, 0, 1, y 2. Además $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ y $f(2) = -4$. Por lo tanto el valor máximo de f es 1, y el valor mínimo es -4.
3) La derivada se anula solo cuando $x = -1$, sin embargo este valor no está en el intervalo de interés, y por ende los puntos críticos solo son 0 y 2. Además $f(0) = 0$ es el mínimo y $f(2) = 2e^2$ es el máximo.

SÍNTESIS

Si un valor c perteneciente al dominio de una función cumple que $f(c) \geq f(x)$ para todo x en el dominio, entonces $f(c)$ es un máximo para f. En caso contrario, es decir $f(c) \leq f(x)$ para todo x, se dice que $f(c)$ es un mínimo para la función, en ambas situaciones se dice que $f(c)$ es un valor extremo.

El hecho de que una función sea continua y definida en un intervalo cerrado $[a,b]$ asegura la existencia de valores extremos, además éstos pueden ser **puntos fronteras**, es decir, coinciden con $f(a)$ ó $f(b)$, **puntos estacionarios** ($f'(c) = 0$) o bien **puntos singulares** ($f'(c)$ no existe).

BIBLIOGRAFÍA

Purcell, E & Varberg, D. (1992). Cálculo con geometría analítica. Prentice Hall.

¿Quieres recibir orientación para optimizar tu estudio en la universidad?

CONTAMOS CON PROFESIONALES EXPERTOS EN
EL APRENDIZAJE QUE TE PUEDEN ORIENTAR

SOLICITA NUESTRO APOYO

Sitio Web de CIMA

Ver más fichas

Solicita más información

TALCA UNIVERSIDAD CHILE

CIMA UNIDAD DE ACOMPAÑAMIENTO ESTUDIANTIL