TALCA
UNIVERSIDAD
CHILE

MATRICES

MATEMÁTICA

VICERRECTORÍA DE PREGRADO

CIVE DIRECCIÓN DE CICLO DE VIDA ESTUDIANTIL

CIMA UNIDAD DE ACOMPAÑAMIENTO ESTUDIANTIL

PACE PROGRAMA DE ACCESO A LA EDUCACIÓN SUPERIOR
Ministerio de Educación

APRENDIZAJE ESPERADO

Resolver ejercicios que impliquen cálculos de determinantes usando las respectivas propiedades.

RUTA DE APRENDIZAJE

Matrices → Determinantes → Propiedades de los determinantes

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Parte esencial de cualquier curso de **álgebra lineal** es el estudio de las **matrices**[1], ya sea como herramienta para resolver **sistemas de ecuaciones**, o en el estudio de **transformaciones lineales** entre subespacios vectoriales. En este contexto es que el **cálculo de determinantes de matrices cuadradas** se vuelve necesario y para esto, conocer sus **propiedades** nos permitirá simplificar notablemente el trabajo.

[1] Una matriz es un arreglo rectangular de números (Grossman, 2008).

Conceptos previos

Si bien el objetivo de este material no es el practicar el cálculo de determinantes, nunca es un mal momento para recordar algunas definiciones.

El determinante de una matriz A de 2×2 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ se define como

$$\boxed{\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

Con frecuencia el determinante de esta matriz A se denotará por $|A|$, y no debe confundirse esta notación con el valor absoluto estudiado para números reales o complejos.

En el caso de que la matriz sea de $3{\times}3$, es decir

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

El determinante viene dado por

$$\boxed{\det A = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}$$

Un estudiante más familiarizado con éstos notará que esta expresión se ha obtenido expandiendo la fila 1; sin embargo, el determinante de una matriz puede ser calculado expandiendo cualquier fila o cualquier columna, o usando la denominada regla de Sarrus[2].

En general, el determinante de una matriz $n{\times}n$ se define de manera inductiva, es decir, se usa lo que se sabe de un determinante de una matriz de $2{\times}2$ para obtener el de una de $3{\times}3$, y el de ésta para definir un determinante de $4{\times}4$ y así sucesivamente (Grossman, 2008).

[2] Mnemotecnia introducida por el matemático francés Pierre Frédéric Sarrus en 1833, la cual permite calcular de forma fácil un determinante de 3×3 (Wikipedia, 2021).

Propiedades de los determinantes

Sean A, B y C matrices de $n \times n$

Es importante notar que *det* es una *función* que toma una matriz cuadrada y le asigna un número.
(Grossman, 2008)

1) $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

Es importante destacar que la operación a la izquierda de la igualdad corresponde a una multiplicación de matrices y a la derecha se trata de una multiplicación de escalares. Por otra parte, una propiedad como esta no es válida para la suma, es decir, en general $\det(A+B) \neq \det A + \det B$. (Grossman, 2008)

EJEMPLO

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ fácil comprobar que $|A| = -1$ y $|B| = 1$.

Además, sea $C = \begin{pmatrix} 13 & 4 \\ 23 & 7 \end{pmatrix} = AB$ donde $|C| = 13 \cdot 17 - 23 \cdot 4 = -1$ verificándose

que $|C| = |A||B| = -1 \cdot 1 = -1$.

2) $\det A^t = \det A$

Esta propiedad es consecuencia de que el determinante de una matriz puede calcularse expandiendo cualquier fila o cualquier columna sin alterarse el resultado[3].

EJEMPLO

Considera la misma matriz A del ejemplo anterior y su traspuesta $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, aquí

$$\det A^t = 1 \cdot 5 - 3 \cdot 2 = -1 = \det A$$

[3] La traspuesta de una matriz A se denomina A^t, y corresponde a la matriz resultante de tomar la matriz A e intercambiar filas y columnas.

3) Si cualquier renglón o columna de A es un vector cero, entonces

$$\det A = 0$$

EJEMPLO

Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, entonces su determinante puede ser calculado expandiendo la fila 1

$$|A| = 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

4) Si el renglón i o columna j de A se multiplica por un escalar c, entonces $\det A$ se multiplica por c. Es decir, si denotamos por B esta nueva matriz, entonces

$$|B| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \cdots & ca_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c|A|$$

Observación: Al utilizar esta propiedad se puede probar que para cualquier escalar α y cualquier matriz A de $n \times n$,

$$\det \alpha A = \alpha^n \det A$$

EJEMPLO

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ donde $\det A$= -3 (compruébalo), calculemos ahora el determinante de la matriz $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ expandiendo la columna 3. Nota que la matriz C es la matriz A pero con la fila 2 triplicada.

$$|C| = 3 \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = -18 + 9 = -9 = 3|A|$$

Comprobándose que $|C|$ =3 $|A|$ =3 · (-3) = 9.

Por otra parte, considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ cuyo determinante es $|A|$ = -1 y la matriz

$B = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 15 \end{pmatrix}$, entonces según la observación realizada en la propiedad

$$|B| = \det \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 15 \end{pmatrix} = \det 3A = 3^2 \det A = 9 \cdot (-1) = -9$$

Esta propiedad es mucho más general aún, pues si en una matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

amplificamos la fila 1 por (-1), la fila 2 por 3 y la fila 3 por (-2) se obtiene la matriz

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -3 & 3 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{vmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -3 & 3 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 3 \cdot (-2) \det A = (-1) \cdot 3 \cdot (-2)(-3) = -18$$

Es decir, cada factor que amplifica a cada fila (columna), debe multiplicar al determinante original. Comprueba este resultado calculando directamente el determinante de la matriz obtenida expandiendo alguna fila o columna, o si lo deseas usa la $regla\ de\ Sarrus$.

5) Sean

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\text{Y} \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j}+b_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j}+b_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj}+b_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Entonces $\quad \det \boldsymbol{C} = \det \boldsymbol{A} + \det \boldsymbol{C}$

En palabras simples, si A, B y C son idénticas excepto por la columna j y que la columna j de C es la suma de las j-ésimas columnas de A y B. Entonces $\det C = \det A + \det C$. La misma afirmación es válida para renglones (Grossman, 2008).

EJEMPLO

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1-6 & 2 \\ 3 & 1+2 & 4 \\ 0 & -2+4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

Entonces $\det A$ = 16, $\det B$ = 108 y $\det C$ = 124 = $\det A$ + de B.

Te desafío a comprobar cada uno de los determinantes expuestos en este ejemplo.

6) El intercambio de cualesquiera dos renglones (o columnas) distintas de A tiene el efecto de multiplicar $\det A$ por -1, es decir si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Entonces $\det B = -\det A$

EJEMPLO

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Al intercambiar las filas 1 y 3 se obtiene $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Al intercambiar las columnas 1 y 2 de A resulta $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Por lo que luego

de hacer los respectivos cálculos se encuentra que $\det A$ = 16 y $\det B$ = $\det C$ = -16.

7) Si A tiene dos renglones o columnas iguales, entonces $\det A$ = 0.

EJEMPLO

Mediante cálculos directos es posible verificar que $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & 7 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$(dos filas iguales) y

$B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ (dos columnas iguales), det$A$ = det$B$ = 0.

8) Si un renglón (columna) de A es un múltiplo escalar de otro renglón (columna), entonces $\det A$=0.

EJEMPLO

$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 7 & 2 \\ -4 & 6 & -10 \end{vmatrix} = 0$ ya que la tercera fila es -2 veces la primera.

9) Si se suma un múltiplo escalar de un renglón (columna) de A a otro renglón (columna) de A, entonces el determinante no cambia.

EJEMPLO

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Entonces det$A$ = 16. Si se multiplica la tercera fila por 4 y se suma al segundo renglón, se obtiene la matriz B dada por

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3+4(0) & 1+4(-2) & 4+4(5) \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -7 & 24 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \text{Y } \det B = 16 = \det A\,.$$

10) El determinante de una matriz diagonal es el producto de los elementos de su diagonal principal[4].

EJEMPLO

Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ matrices diagonal superior

e inferior respectivamente, entonces det$A$ = -6 = 3 · 2 · (-1) y det$B$ = 0 = 0 · (-1) · 3.

(El determinante de la matriz B también pudo ser deducido a partir de la propiedad 3).

11) El determinante de una matriz triangular superior (inferior) es el producto de los elementos de su diagonal[5].

EJEMPLO

Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 16 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Donde A y B son matrices triangulares superiores y C es triangular inferior, sus determinantes son $|A|$=32, $|B|$=3 y $|C|$=0.

Es importante notar que una matriz diagonal puede tener ceros en su diagonal, como es el caso de C.

[4] Una matriz cuadrada A se llama **matriz diagonal** si todas sus componentes distintas de cero están en la diagonal (Gerber, 1990).

[5] Una matriz cuadrada se llama triangular superior si todas sus componentes que se encuentran debajo de los elementos de la diagonal son cero. Una matriz cuadrada se llama triangular inferior si todas las componentes que se encuentran arriba de la diagonal son cero (Gerber, 1990).

12) Determinante de una matriz inversa[6].
Si A es invertible, entonces $\det A \neq 0$ y

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

EJEMPLO

Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ Note que B es la matriz inversa de A (o viceversa), es decir $B = A^{-1}$, pues $AB = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Además, si calculamos el determinante de A expandiendo la fila 3 resulta

$$\det A = -2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 8$$

Y si calculamos el determinante de $B = A^{-1}$ expandiendo la fila 2 se obtiene

$$\det A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{8}$$

Cumpliéndose que $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.

[6] Una matriz B se llama inversa de una matriz cuadrada A si $AB=BA=I_n$. Esta matriz B se denomina A^{-1}. Si una matriz no tiene inversa se denomina no invertible o singular (Gerber, 1990).

EJERCICIOS RESUELTOS

Resuelve los siguientes ejercicios aplicando la propiedad de determinantes que sea pertinente.

1) Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ y $|A|$=-3.

¿Cuál es el valor del determinante de $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$?

Nota que la matriz B corresponde a la matriz A con las filas 2 y 3 conmutadas, entonces por la propiedad 6 $|B|$ = -$|A|$ = 3.

En los ejercicios 2 a 4 calcula los determinantes suponiendo que $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 8$

2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix}$

Con respecto a la matriz dada, se cambió la fila 2 por la 3, entonces por la propiedad 6 se produce un cambio de signo en el valor del determinante original, y el valor de este es (-1)·8=-8.

3) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 3a_{21} & 3a_{22} & 3a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Con respecto a la matriz dada, se amplificó la fila 2 por 3, por la propiedad 4 el determinante solicitado es 3·8=24.

4) $\begin{vmatrix} -3a_{11} & -3a_{12} & -3a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ 5a_{31} & 5a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}$

Aquí se amplificó la fila 1 por (-3), la fila 2 por 2 y la fila 3 por 5 y según se vio en el segundo ejemplo de la propiedad 4 el valor de este determinante es (-3)·2·5·8=-240.

5) Sin realizar mayores cálculos encuentra el valor del siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 9 \\ 2 & 4 & 7 & 6 \\ -1 & 5 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

Para este ejercicio no es necesario realizar cálculos, pues es posible ver que la cuarta columna es el triple de la primera, y por la propiedad 8 el valor de este determinante es 0.

EJERCICIOS PROPUESTOS

Aplicando alguna de las propiedades descritas encuentre el determinante solicitado, o los posibles valores que este puede tomar según corresponda.

1) Se sabe que $|A|$ = -2, luego se determina A^t y a esta última se le intercambia la columna 1 con la 3. ¿Cuál es el valor del nuevo determinante?

2) Una matriz A se denomina idempotente si $A^2 = A$. Utilizando la propiedad 1 plantea una ecuación que te permita saber cuáles son los valores posibles para $\det A$ si A es idempotente.

3) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, encuentre

a) $\det A =$

b) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$

c) $\det \begin{pmatrix} 5 & 10 & 5 \\ 1 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} =$

d) $\det 2A =$

4) Si se considera que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 5 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

¿Cuál es el valor de $|C|$? ¿Qué propiedad aplica?

5) Sin realizar cálculos, encuentre $\det A$ si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & -3 & 1 & -1 \\ 4 & 8 & -4 & 12 \end{pmatrix}$

RESPUESTAS A EJERCICIOS PROPUESTOS

1) 2

2) Puede ser 0 o 1.

3) a) -1
b) 1
c) -5
d) -8

4) 0

5) 0

SÍNTESIS

A toda matriz cuadrada se le puede asociar un número llamado determinante, el cual juega un rol fundamental en el estudio de estos elementos matemáticos y sus aplicaciones.

Si bien el cálculo de los determinantes puede ser un desafío para matrices de 4×4 o más, existen numerosas propiedades que pueden simplificar nuestro trabajo, la clave está en detectar las características de cada matriz en particular para ver si aplica alguna de ellas.

BIBLIOGRAFÍA

Gerber, H. (1990). Álgebra Lineal. Grupo Editorial Iberoamérica.
Grossman, S. I. (2008). Álgebra Lineal. McGrawHill.
Wikipedia. (15 de Febrero de 2021). Regla de Sarrus. Obtenido de Wikipedia: https://es.wikipedia.org/wiki/Regla_de_Sarrus

¿Quieres recibir orientación para optimizar tu estudio en la universidad?

CONTAMOS CON PROFESIONALES EXPERTOS EN
EL APRENDIZAJE QUE TE PUEDEN ORIENTAR

SOLICITA NUESTRO APOYO

Sitio Web de CIMA

Ver más fichas

Solicita más información

TALCA UNIVERSIDAD CHILE

CIMA UNIDAD DE ACOMPAÑAMIENTO ESTUDIANTIL