UNIVERSIDAD DE TALCA CHILE

RAÍCES

MATEMÁTICA

Vicerrectoría de Pregrado
CIVE Dirección de Ciclo de Vida Estudiantil
CIMA Unidad de Acompañamiento Estudiantil
PACE Programa de Acceso a la Educación Superior
Ministerio de Educación

RUTA DE APRENDIZAJE

Números Racionales → Potencias → Raíces

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

En esta ficha profundizaremos el concepto de raíz, para que puedas comprender el proceso que involucran sus operaciones, estableciendo la relación que tienen estas con la notación y propiedades de potencias de exponente racional. A través de la ejercitación, se busca que entiendas los procesos y su respectivo orden.

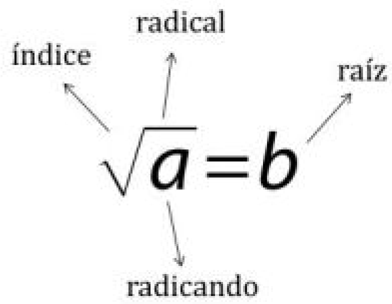
Exponentes y Radicales

En esta ficha estudiaremos en primer lugar las raíces y luego veremos su relación con las potencias. Empezaremos con algo que me imagino debes conocer: la raíz cuadrada.

Def:
Recordemos que √a = b significa que b^2 = a y b ≥ 0.
Como a = b^2 ≥ 0, tenemos que √a está bien definida sólo si a ≥ 0.

Ej: √36 = 6 pues 6^2 = 36, pero √−25 no está definida (es decir no está en R).

Veamos los elementos de la raíz:



Pasemos ahora al caso más general, las raíces n-ésimas.

Def:
Si n ∈ Z^+ entonces la Raíz n- ésima Principal de a se define como:

$$\sqrt[n]{a} = b \text{ significa que } b^n = a.$$

Si n es par a ≥ 0 y b ≥ 0.

Ej:

1. $\sqrt[4]{16} = 2$ pues $2^4 = 16$.
2. $\sqrt[3]{-125} = -5$ pues $(-5)^3 = -125$.

Veamos ahora las propiedades que cumplen las raíces. Para que se entienda mejor al lado de cada propiedad te dejamos un pequeño ejemplo.

Propiedades de las Raíces:

(a) $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ $\qquad$ $\sqrt[5]{4}\cdot\sqrt[5]{8}=\sqrt[5]{32}=2$

(b) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ $\qquad$ $\dfrac{\sqrt[5]{24}}{\sqrt[5]{6}}=\sqrt[5]{\dfrac{24}{6}}=\sqrt[5]{4}$

(c) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[m\cdot n]{a}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{\sqrt[4]{8}}=\sqrt[3\cdot 4]{8}=\sqrt[12]{8}$

(d) $\sqrt[n]{a^n}=a$ si n es impar $\qquad$ $\sqrt[3]{-27}=\sqrt[3]{(-3)^3}=-3$

(e) $\sqrt[n]{a^n}=|a|$ si n es par $\qquad$ $\sqrt{(-7)^2}=|-7|=7$

Otros Ejemplos:

1. $\sqrt[3]{x^5y^3}=\sqrt[3]{x^3x^2y^3}=xy\sqrt[3]{x^2}.$
2. $\sqrt[4]{16a^8b^4}=\sqrt[4]{16}\sqrt[4]{a^8}\sqrt[4]{b^4}=2\cdot\sqrt[4]{(a^2)^4}\cdot|b|=2a^2|b|.$
3. $\sqrt{32}+\sqrt{98}-\sqrt{18}=\sqrt{16\cdot 2}+\sqrt{49\cdot 2}-\sqrt{9\cdot 2}=4\sqrt{2}+7\sqrt{2}-3\sqrt{2}=8\sqrt{2}.$

Ahora relacionamos las raíces con las potencias, ¿te acuerdas cómo expresar una raíz en forma de potencia? Sí no.... te lo mostramos en la siguiente definición.

Potencias con Exponente racional:

Sean $m,n\in\mathbb{Z}$ y $n\geq 0$ definimos: $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$.
Si n es par entonces $a\geq 0$.

Ahora con números...

Ejemplos:

1. $9^{1/2}=\sqrt{9}=3$
2. $64^{-1/3}=\dfrac{1}{64^{1/3}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{64}}=\dfrac{1}{4}$

Obs: Se puede demostrar que las Leyes de Exponentes Enteros también se cumplen para exponentes racionales.

Ejemplos: Simplificar las siguientes expresiones:

1. $5\sqrt[3]{5}:\sqrt{\left(\dfrac{1}{5}\sqrt[5]{25}\right)^{-1/3}}=5\cdot 5^{1/3}:\sqrt{(5^{-1}\cdot 5^{2/5})^{-1/3}}=5^{4/3}:\sqrt{(5^{-3/5})^{-1/3}}=5^{4/3}:\sqrt{5^{1/5}}=$
$5^{4/3}:5^{1/10}=5^{37/30}.$

2. Sean x, y, $z \geq 0$:

$$\left(\frac{4y^3z^{2/3}}{x^{1/2}}\right)^2 \cdot \left(\frac{x^{-3}y^6}{8z^4}\right)^{1/3} = \frac{16y^6z^{4/3}}{x} \cdot \frac{x^{-1}y^2}{8^{1/3}z^{4/3}} = \frac{16y^6}{x} \cdot \frac{x^{-1}y^2}{\sqrt[3]{8}} = \frac{8y^8}{x^2}$$

3. Sean $x < 1$:

$$\sqrt{(x-1)^2} - \sqrt{(2-x)^2} = |x-1| - |2-x|$$

Como $x < 1$ entonces $x - 1 < 0$ luego $|x-1| = -(x-1) = -x+1$.
De manera análoga $2 - x > 0$ luego $|2-x| = 2-x$.

Entonces: $\sqrt{(x-1)^2} - \sqrt{(2-x)^2} = |x-1| - |2-x| = 1 - x - (2-x) = 1 - x - 2 + x = -1$.

Una aplicación directa de las raíces es el proceso de Racionalización. ¿Te acuerdas de esto?

Racionalización:

Consiste en ”eliminar” el radical del denominador (o numerador) de una fracción multiplicando por una expresión adecuada tanto el numerador como el denominador de dicha fracción. En otras palabras se multiplica por un 1 conveniente. Veamos algunos ejemplos:

1. $\dfrac{1}{\sqrt{7}} = \dfrac{1}{\sqrt{7}} \cdot \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{49}} = \dfrac{\sqrt{7}}{7}$

2. $\dfrac{6}{\sqrt[5]{2}} = \dfrac{6}{\sqrt[5]{2}} \cdot \dfrac{\sqrt[5]{2^4}}{\sqrt[5]{2^4}} = \dfrac{6\sqrt[5]{2^4}}{\sqrt[5]{2^5}} = \dfrac{6\sqrt[5]{16}}{2} = 3\sqrt[5]{16}$

3. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^3}} = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x}$

Ahora te dejaremos algunos ejercicios que te sirven para chequear lo que has aprendido acá. Al final encontrarás los resultados para que veas si están bien.

Si no llegas al resultado no te desanimes, revisa la ficha las veces que sea necesario y ante cualquier duda puedes escribirnos al mail: **gguerra@utalca.cl.**

Ejercicios:

1. Simplifique las siguientes expresiones

(a) $\dfrac{(2^3)^{-2} \cdot (3^{3/2})^{2/3}}{(2^{10})^{1/2} \cdot 3^{1/3}}$

(b) $\dfrac{\sqrt{4\sqrt[3]{6}}}{\sqrt[3]{4\sqrt{6}}}$

(c) $\left(\dfrac{x^{-2/3}}{y^{1/2}}\right) \cdot \left(\dfrac{x^{-2}}{y^{-3}}\right)^{1/6}$

(d) $\dfrac{12x\sqrt{x^4y^3}}{\sqrt{3x^2y^5}}$ con $x, y > 0$.

2. Simplificar la expresión: $\sqrt{a^2} + \sqrt{(-4)^2} - \sqrt[3]{a^3} + \sqrt[5]{(-3)^5}$ considerando:

   (a) $a \geq 0$.

   (b) $a < 0$.

3. Si $X = \sqrt{5} - \sqrt{20}$ determine el valor de X^4.

4. Racionalizar el denominador de las siguientes fracciones:

   (a) $\dfrac{2}{\sqrt{6}}$

   (b) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^2y^3}}$

   (c) $\dfrac{a}{b^{2/3}}$

Resultados:

1. (a) $\dfrac{\sqrt[3]{9}}{2^{11}}$

   (b) $\sqrt[3]{2}$

   (c) $\dfrac{1}{x}$

   (d) $\dfrac{2\sqrt{3}x^2}{y}$

2. (a) 1

   (b) $1 - 2a$

3. 25

4. (a) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

   (b) $\dfrac{\sqrt[5]{x^3y^2}}{xy}$

   (c) $\dfrac{a\sqrt[3]{b}}{b}$

¿Quieres recibir orientación para optimizar tu estudio en la universidad?

CONTAMOS CON PROFESIONALES EXPERTOS EN
EL APRENDIZAJE QUE TE PUEDEN ORIENTAR

SOLICITA NUESTRO APOYO

Sitio Web de CIMA

Ver más fichas

Solicita más información

TALCA UNIVERSIDAD CHILE

CIMA UNIDAD DE ACOMPAÑAMIENTO ESTUDIANTIL