

RECORRIDO DE UNA FUNCIÓN

MATEMÁTICA

RUTA DE APRENDIZAJE

- El aprendizaje esperado para este documento es conocer el concepto de recorrido o imagen de una función, para poder determinarlo, por lo que nos enfocaremos en los últimos dos temas de la ruta.

Concepto de Función

¿Qué es el dominio de una función?

¿Cómo determinar el dominio de una función?

¿Qué es el recorrido de una función?

¿Cómo determinar el recorrido de una función?



¡IMPORTANTE!

Para la completa comprensión de esta guía es necesario el conocimiento del concepto de función y su dominio. Este contenido lo puedes encontrar en la guía de **“Dominio de una función”** de los recursos CIMA.

ÍNDICE

- Introducción
- Recorrido de una función
- Determinar el recorrido de una función
- Ejercicios resueltos
- Ejercicios propuestos
- Síntesis

INTRODUCCIÓN

En la primera guía señalada en la ruta de aprendizaje, se destacó el concepto de función como una relación que asigna a cada elemento del conjunto de partida (dominio) un único elemento del conjunto de llegada; **esta guía se enfoca en este último conjunto, llamado recorrido o imagen de una función.**

Importante destacar, que las restricciones utilizadas en la primera guía (Dominio de una función), se utilizan también en esta para determinar el recorrido.



IMPORTANTE!

CONSIDERAR PARA DETERMINAR EL DOMINIO Y RECORRIDO DE UNA FUNCIÓN

Para calcular el dominio y recorrido se deben **recordar ciertas restricciones a cumplir en los números REALES**.

1. El denominador de una fracción NO puede tener valor cero

$$\frac{a}{0}: \text{No existe en } \mathbb{R}$$

$a \in \mathbb{R}$, (a representa cualquier número real)

Ejemplo:

Lo siguiente no existe en los números reales:

$$\frac{104}{0}, \frac{-33}{0}, \frac{23234}{0}, \frac{\sqrt{5}}{0}$$

2. El radicando de una raíz con índice par NO puede ser negativo en los números reales:

$$\sqrt[n]{a}:$$

*Si n número par, a número negativo,
lo anterior NO está definido en \mathbb{R}*

Ejemplo:

Los siguientes valores no están definidos en los números reales

$$\sqrt{-25}, \sqrt[4]{-100}, \sqrt{-36}, \sqrt{-3} \dots$$

Nota: si no logras comprender a cabalidad estas restricciones presentes en los números reales, no te compliques, puedes consultarlas en las tutorías.



CONTENIDO

RECORRIDO DE UNA FUNCIÓN

Recordemos, de la guía anterior, que el dominio de una función se define como el conjunto de partida de la relación, la mayoría de las veces se representa por las "x" para las cuales la función tiene sentido en los reales ("x" que cumplen con las restricciones). Por otro lado, **se define como rango, imagen o recorrido de una función a los resultados obtenidos de ella (generalmente valores de "y")**.

Gráficamente, el rango corresponde a los valores del eje y (ordenadas) que **TIENEN** preimagen.

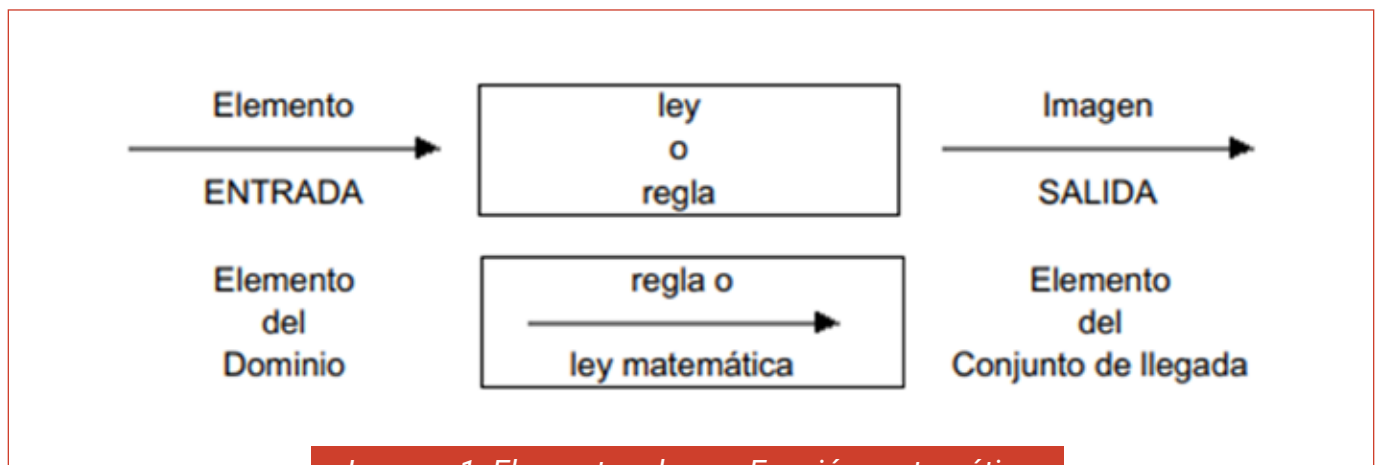


Imagen 1: Elementos de una Función matemática

Engler, Müller, Vrancken, & Hecklein. (2020). Elementos de una función matemática. Recuperado de <https://bibliotecavirtual.unl.edu.ar:8443/bitstream/handle/11185/2308/funciones.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

Con esta definición se pueden comprender los elementos destacados en la imagen 1, que corresponden a la composición de una función.

EJEMPLO DE DOMINIO Y RECORRIDO DE UNA FUNCIÓN:

Teniendo en consideración lo señalado en este documento y en el anterior, calcule el dominio y recorrido de la siguiente función:

$$g(x) = 5 + \sqrt{x - 3}$$

• DESARROLLO DOMINIO

Para el dominio se debe cumplir el requerimiento de que el radicando (lo que está bajo la raíz) debe ser mayor o igual a cero (según lo visto en el cuadro **⚠ IMPORTANTE**), entonces se tiene:

$$\begin{aligned}x - 3 &\geq 0 / \text{despejando } x \text{ se tiene} \\x &\geq 3\end{aligned}$$

✓ **RESPUESTA:** Esto quiere decir que el dominio está determinado por:

$$\text{Dom}g(x) = \{x | x \geq 3\}$$

• DESARROLLO RECORRIDO

Se debe analizar que para todos los valores del dominio ($x \geq 3$), $g(x)$ o "y" toma valores mayores o iguales a 5 (puedes ir reemplazando algunos valores para verificar lo que sucede).

✓ **RESPUESTA:** entonces el rango está determinado por:

$$\text{Rec}g(x) = \{y | y \geq 5\}$$

Nota: el cálculo y determinación del dominio y recorrido de una función no es amigable para todos, si quedaste con dudas del ejemplo, lo puedes consultar a tu tutor o tutora de matemática.



GRÁFICAMENTE

En la imagen 2 se puede observar que en el eje "x" la gráfica toma valores mayores que 3 (línea roja) correspondiente al dominio de la función, y en el eje "y" la gráfica tiene valores mayores a 5 (línea azul) correspondiente al recorrido de la función.

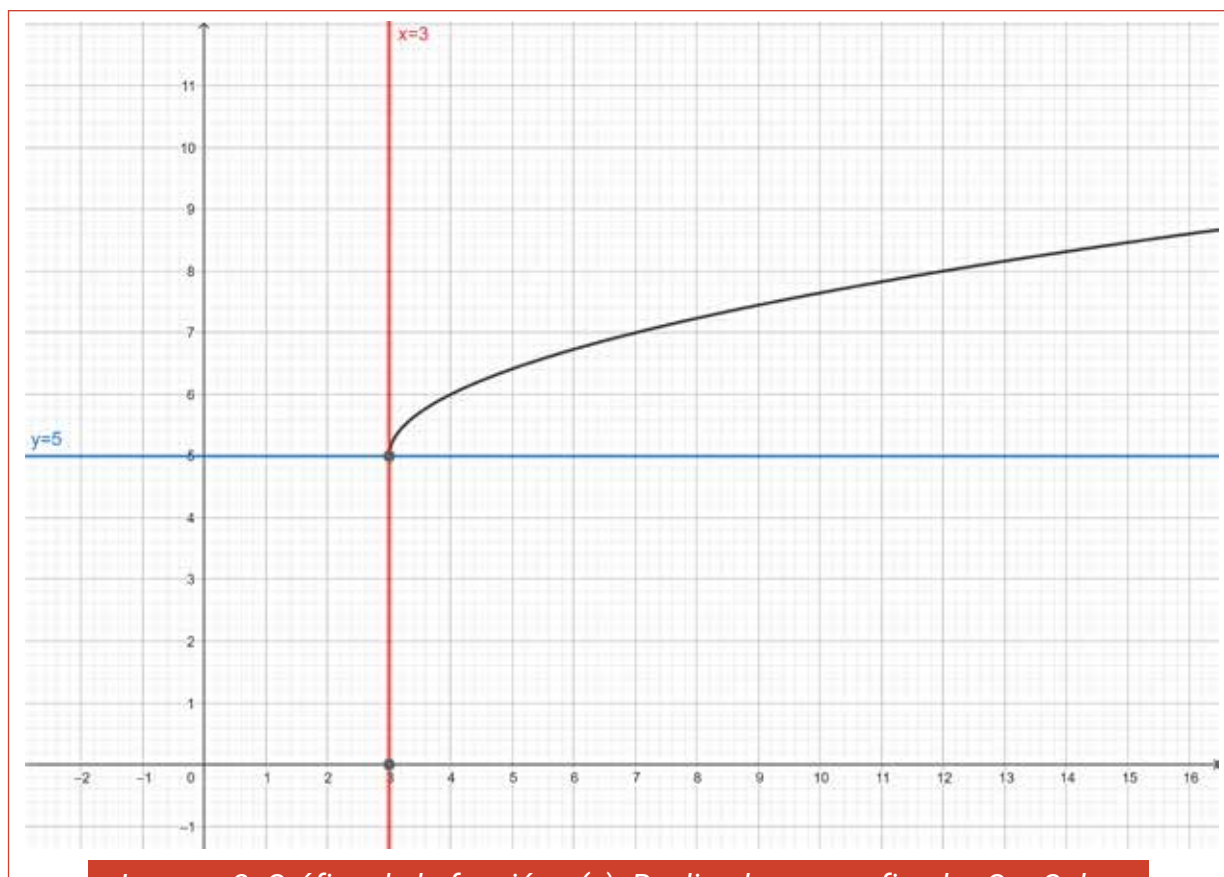


Imagen 2: Gráfica de la función $g(x)$. Realizada con graficador GeoGebra





EJERCICIOS RESUELTOS

En cada uno de los siguientes ejercicios, teniendo en consideración lo expuesto en el documento, calcula el recorrido (imagen) de las funciones expuestas. *Nota: si surgen dudas consulta al tutor o tutora de matemática.*

1. Si $f(x) = \frac{x}{x-3}$

a) Determine el recorrido de la función

• DESARROLLO

Para calcular el recorrido de una función se deben encontrar los valores que toma "y", por lo que debemos despejar la variable "x", para luego analizar qué restricciones debe cumplir "y":

$$f(x) = \frac{x}{x-3} / \text{como } y = f(x)$$

$$y = \frac{x}{x-3} / \text{multiplicando por } (x-3)$$

$$y(x-3) = x / \text{resolviendo el paréntesis}$$

$$xy - 3y = x / \text{agrupando las "x"}$$

$$xy - x = 3y / \text{factorizando}$$

$$x(y-1) = 3y / \text{dividiendo por } (y-1) \text{ para despeja "x"}$$

$$x = \frac{3y}{y-1}$$

Al tener despejada la variable "x" se puede analizar que valores no puede tomar "y". Considerando el cuadro **⚠ IMPORTANTE** en un denominador no se puede tener el valor 0 por lo que se debe cumplir lo siguiente:

$$y - 1 \neq 0 / \text{despejando "y"}$$

$$y \neq 1$$

Luego la variable y no toma el valor 1.

✓ RESPUESTA

$$\text{Rec}f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$$

b) Calcule la imagen de 2

• **DESARROLLO**

Para calcular la imagen de 2 se debe reemplazar "x" por 2, y resolver:

$$y = \frac{2}{2-3}$$

$$y = \frac{2}{-1}$$

$$y = -2$$

✓ **RESPUESTA**

La imagen de 2 es -2.

c) Encontrar el valor de $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

• **DESARROLLO**

Para calcular el valor que se pide se puede subdividir el ejercicio, reemplazando "x" por los valores solicitados, recordando que:

- $f(x) = \frac{x}{x-3}$

- $f(x+h) = \frac{(x+h)}{(x+h)-3}$

Entonces, reemplazando y resolviendo se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\frac{x+h}{x+h-3} - \frac{x}{x-3}}{h} \\ &= \frac{\frac{(x+h)(x-3) - x(x+h-3)}{(x+h-3)(x-3)}}{h} \\ &= \frac{x^2 - 3x + hx - 3h - x^2 - hx + 3x}{h(x+h-3)(x-3)} \\ &= \frac{-3h}{h(x+h-3)(x-3)} \\ &= \frac{-3}{(x+h-3)(x-3)} \end{aligned}$$

✓ **RESPUESTA**

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{-3}{(x+h-3)(x-3)}$$

Nota: este último ejercicio es muy utilizado en matemática, si no lo lograste entender a cabalidad, no dudes en consultarlo a tu tutor.

2. A continuación, se entrega una gráfica de la función $y = f(x)$

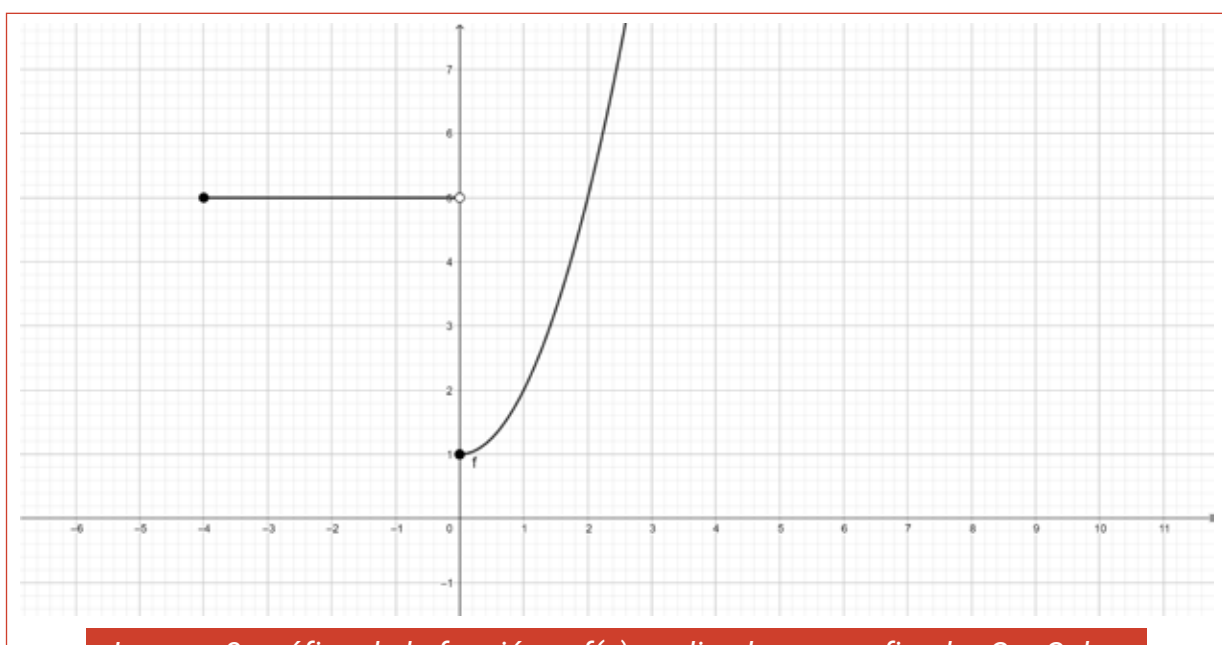


Imagen 3: gráfica de la función $y=f(x)$, realizada con graficador GeoGebra

a) Según la imagen 3 determine el valor de $f(-3), f(0), f(1), f(2)$

• **DESARROLLO**

Para determinar los valores solicitados debemos ubicarnos en el eje x, buscar los números consultados, y observar qué resultados aproximados tienen en el eje y.

✓ **RESPUESTA**

- $f(-3)=5$
- $f(0)=1$
- $f(1)=2$
- $f(2)=5$

b) Determinar el recorrido de $f(x)$.

• **DESARROLLO**

Para determinar el recorrido de la función debemos ubicarnos en el eje "y" y analizar qué valores tienen y cuáles no tienen preimágenes en el eje "x".

En "y" el intervalo $[1, +\infty[$ tiene preimágenes en "x", por lo que sólo éste pertenece al recorrido de la función

✓ **RESPUESTA**

$$\text{Rec}f(x) = [1, +\infty[$$

Nota: si presentas dudas de los ejercicios resueltos, lo puedes consultar a tu tutor o tutora de matemática.





EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Calcule el dominio y recorrido de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3x - 15$

b) $y = \frac{33}{6x-18}$

c) $h(x) = 2 + \sqrt{3x-1}$

2. Si $f(x) = \sqrt{x-3}$ calcule:

a) $f(3)$

b) $f(7)$

c) $f(0)$

d) $f(h)$

Respuestas

1.

a) $Domf(x) = \mathbb{R}$ y $Recf(x) = \mathbb{R}$

b) $Domf(x) = \mathbb{R} - \{3\}$ y $Recf(x) = \mathbb{R} - \{0\}$

c) $Domh(x) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{1}{3}\right\}$ y $Rech(x) [2, +\infty[$

2.

a) $f(3) = 0$

b) $f(7) = 2$

c) $f(0) = \text{No está definido en los reales.}$

d) $f(h) = \sqrt{h-3}$

SÍNTESIS

A modo de resumen de toda la ruta de aprendizaje tenemos:

FUNCIONES

- Describe la dependencia de una cantidad sobre otra.

FUNCIONES MATEMÁTICAS

- Relación que asigna a cada elemento del conjunto de partida un único elemento del conjunto de llegada.

RECORRIDO DE UNA FUNCIÓN MATEMÁTICA

- Todos los resultados o elementos de llegada de la función (también llamado imágenes de la función).
- Generalmente son los valores que toma la variable "y".

DOMINIO DE UNA FUNCIÓN MATEMÁTICA

- Todos los valores de entrada o partida de una función.
- Generalmente, son los valores que toma la variable "x".



¿Quieres recibir orientación para optimizar tu estudio en la universidad?

CONTAMOS CON PROFESIONALES EXPERTOS EN EL APRENDIZAJE QUE TE PUEDEN ORIENTAR

SOLICITA NUESTRO APOYO



Sitio Web de CIMA



Ver más fichas



Solicita más información