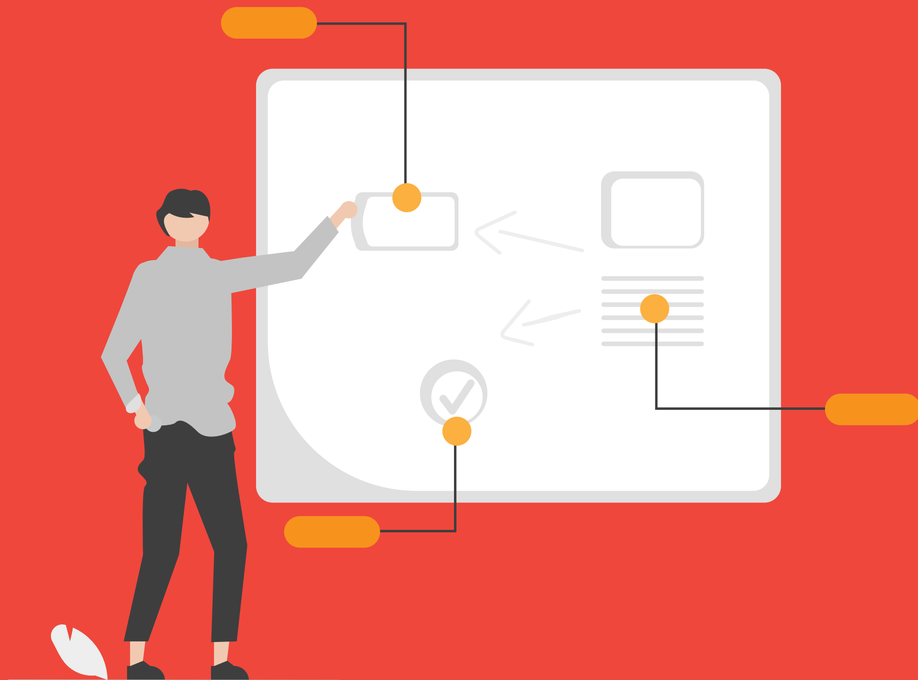


Composición de Funciones

MATEMÁTICA

Vicerrectoría de Pregrado

CIVE Dirección de Ciclo de Vida Estudiantil

CIMA Unidad de Acompañamiento Estudiantil

PACE Programa de Acceso a la Educación Superior

Ministerio de Educación

RUTA DE APRENDIZAJE

- En este documento se espera reforzar Funciones, en particular viendo una nueva operación que se puede hacer con ellas, esto es la composición de funciones.

Funciones | Dominio | Recorrido | Composición de Funciones

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

En matemática, la composición es una nueva operación, en la **cual dos funciones dan origen a nueva función**, esta operación consiste en utilizar elementos del recorrido de una de ellas como si fuesen el dominio de la otra.

El símbolo para designar esta operación es $\circ$, y si tenemos la expresión $f \circ g$ debemos leerla como "f compuesta con g".

Composición de funciones

Al igual que ocurre con otras operaciones, la composición se define sólo para dos funciones, pero se pude aplicar a tres o más, simplemente aplicando de forma recursiva la siguiente definición.

> Dadas dos funciones f y g, la función compuesta $f \circ g$ (también llamada composición de f y g) está definida por
>
> $$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$$
>
> Stewart et al., 2012.

El dominio de esta nueva función $f \circ g$ es el conjunto de toda x en el dominio de g tal que $g(x)$ está en el dominio de f. En otras palabras, $(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x})$ **está definida siempre que tanto** $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ **como** $\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\big)$ **estén definidas.**

Veamos cómo actúa la compuesta a partir de un ejemplo.

Sean $f(x) = 3x + 1$ y $g(x) = x^2$, como se puede comprobar en las figuras 1 y 2 el recorrido de g son todos los números reales, al igual que el dominio de f, por lo que la compuesta se puede realizar sin problemas.

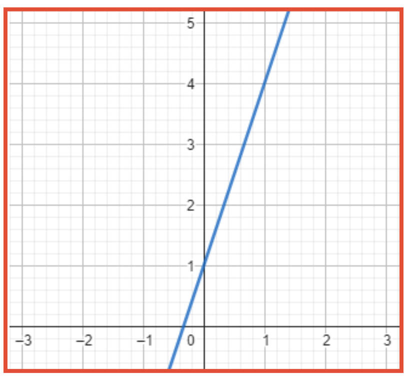


Figura 2: *Gráfica de $f(x) = 3x + 1$ con dominio y recorrido los reales.*

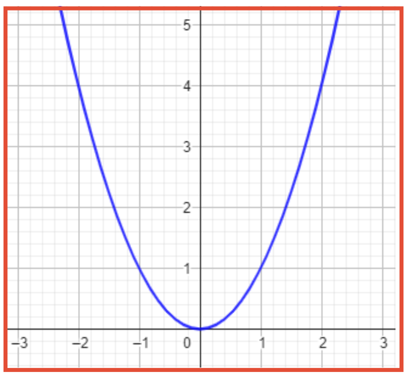


Figura 1: *Gráfica de $g(x) = x^2$ con dominio los reales, y recorrido el intervalo $[0, \infty[$.*

Calculemos $(f \circ g)(-2)$ entendiendo que primero actúa la función de la derecha, en este caso g.

La imagen[1] de -2 bajo la función g es $g(-2) = (-2)^2 = 4$ y aplicando luego la función f a 4 se obtiene $f(4) = 3 \cdot 4 + 1 = 13$.

Los cálculos anteriores implican que $(f \circ g)(-2) = f\big(g(-2)\big) = 13$.

La definición anterior nos entrega, aunque no lo parezca, un procedimiento que permite encontrar la expresión algebraica explícita que representa a la función compuesta $f \circ g$, veamos

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$$

$$(f \circ g)(x) = f(x^2)$$

$$(f \circ g)(x) = 3x^2 + 1$$

Comprobemos calculando $(f \circ g)(-2)$ directamente con esta nueva expresión

$$(f \circ g)(-2) = 3(-2)^2 + 1 = 3 \cdot 4 + 1 = 13$$

Coincidiendo, como era de esperar, con el valor ya conocido.

Finalmente nota que la composición de funciones en general no es una operación conmutativa[2], calculemos $g \circ f$ para comprobarlo

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$

$$(g \circ f)(x) = g(3x + 1)$$

$$(g \circ f)(x) = (3x + 1)^2$$

$$(g \circ f)(x) = 9x^2 + 6x + 1$$

Además $(g \circ f)(-2) = 9(-2)^2 + 6(-2) + 1 = 25$

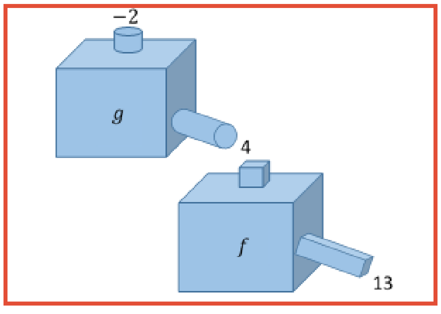


Figura 4: *Compuesta $(f \circ g)(-2)$ calculando $g(-2) = 4$ y luego $f(4) = 13$.*

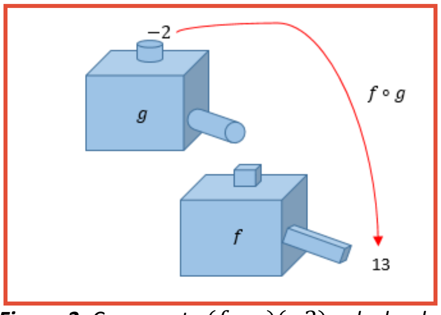


Figura 3: *Compuesta $(f \circ g)(-2)$ calculando directamente en su modelo explícito $(f \circ g) = 3x^2 + 1$.*

[1] Imagen: elemento del recorrido de una función.

[2] Una operación se denomina conmutativa cuando al cambiar de orden los elementos a operar, el resultado no cambia. Por ejemplo la suma es conmutativa, pues para para cualquier pareja de números reales a y b resulta que $a + b = b + a$.

LEE Y ANALIZA LOS SIGUIENTES PROBLEMAS

A continuación, se presentan ejercicios resueltos con sus procedimientos, en estos problemas se sugiere hacer lo siguiente:

- Lee comprensivamente.
- Revisa el paso a paso.
- Destaca lo que te resulte importante.
- Destaca lo que te genere dudas y luego consulta al tutor.

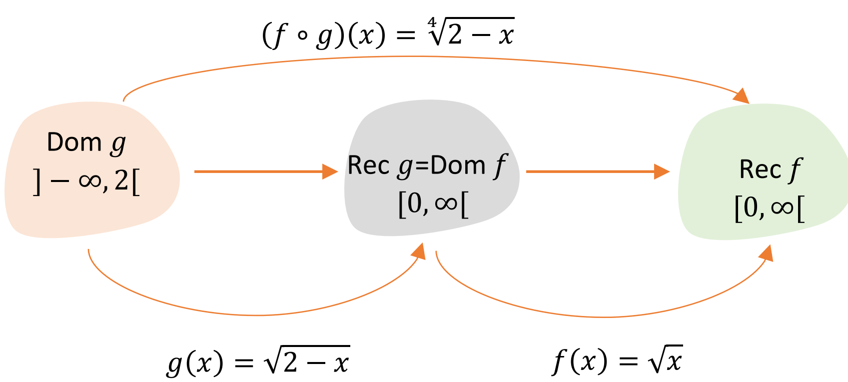
1) Para las funciones $\boldsymbol{f(x)=\sqrt{x}}$ y $\boldsymbol{g(x)=\sqrt{2-x}}$ determine explícitamente la función $\boldsymbol{f\circ g}$, y el valor de $\boldsymbol{(f\circ g)(-79)}$

Primero veamos que la función g tiene como dominio el conjunto $]-\infty,2]$, y su recorrido es $[0,\infty[$. Por otra parte, tanto el dominio como el recorrido de f es el intervalo real $[0,\infty[$. Ahora determinemos $f\circ g$ usando la definición

$$
\begin{aligned}
(f\circ g)(x) &= f\big(g(x)\big)\\
&= f\big(\sqrt{2-x}\,\big)\\
&= \sqrt{\sqrt{2-x}}\\
(f\circ g)(x) &= \sqrt[4]{2-x}
\end{aligned}
$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$$

El esquema siguiente representa la relación entre las funciones y sus respectivos dominios y recorridos



Para calcular $(f\circ g)(-79)$ podemos proceder de dos formas distintas, calcular primero $g(-79)$ y a este valor aplicarle la función f

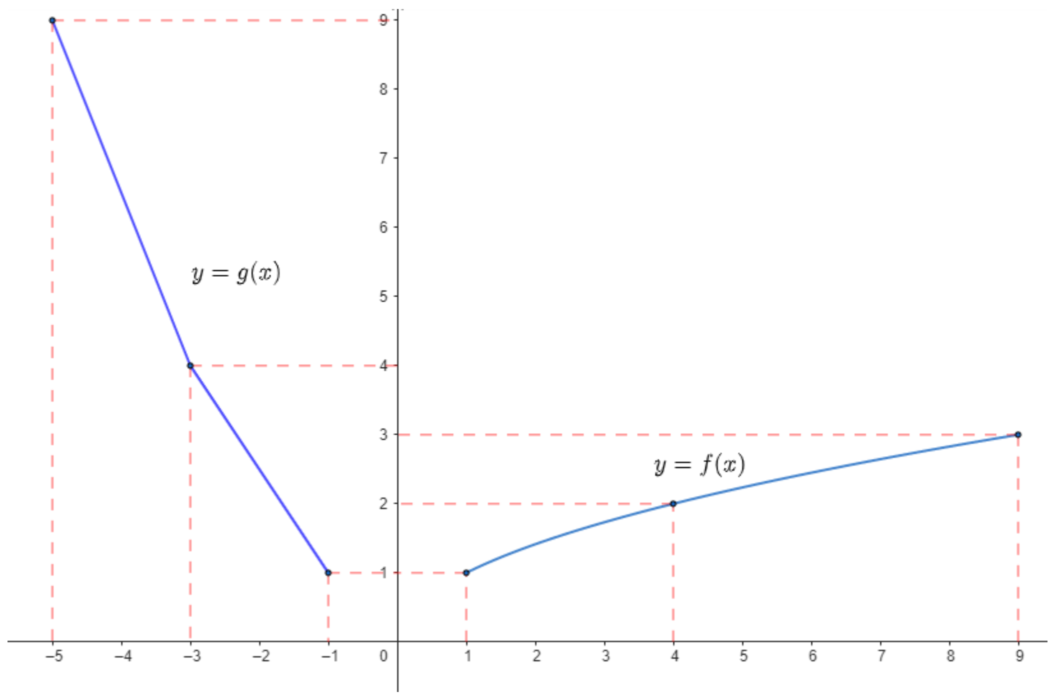
$$g(-79) = \sqrt{2-(-79)} = \sqrt{81} = 9$$

Y finalmente calculamos $f\big(g(-79)\big) = f(9) = \sqrt{9} = 3$

El segundo procedimiento consiste en calcular $(f \circ g)(-79)$ directamente en la función $f \circ g$ que se encontró en el paso anterior

$$(f \circ g)(-79) = \sqrt[4]{2-(-79)} = \sqrt[4]{81} = 3$$

2) **A continuación, se presenta la gráfica de dos funciones, a la izquierda del eje de las ordenadas se ilustra $g(x)$ y a la derecha $f(x)$.**



A partir de ellas determine el valor de

a) $(f \circ g)(-3)$
b) $(f \circ g)(-5)$

Aquí no es posible encontrar una expresión algebraica para la compuesta $f \circ g$, pues no conocemos explícitamente ninguna de las dos funciones, sin embargo, los valores presentes en la gráfica contienen toda la información necesaria.

a) Nota que $g(-3) = 4$ y $f(4) = 2$, con lo cual

$$\begin{aligned}(f \circ g)(-3) &= f\big(g(-3)\big)\\ &= f(4)\\ &= 2\end{aligned}$$

b) El valor de g evaluado en -5 es $g(-5) = 9$ y $f(9) = 3$. A partir de esto podemos decir que

$$\begin{aligned}(f \circ g)(-5) &= f\big(g(-5)\big)\\ &= f(9)\\ &= 3\end{aligned}$$

3) **Algo un poco más difícil: encuentre la expresión algebraica de $\boldsymbol{g \circ f}$ para $\boldsymbol{f(x) = 3x - 5}$ y $\boldsymbol{g(x) = 2 - x^2}$. ¿Existe $\boldsymbol{x}$ en los números reales tal que $\boldsymbol{(g \circ f)(x) = -14}$?**

Primero encontremos la función compuesta, apliquemos la definición para encontrar la expresión algebraica

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g\big(f(x)\big)\\ &= g(3x - 5)\\ &= 2 - (3x - 5)^2 \longrightarrow (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2\\ &= 2 - (9x^2 - 30x + 25)\\ (g \circ f)(x) &= -9x^2 + 30x - 23\end{aligned}$$

Ahora veamos si existe algún valor de la variable independiente tal que la compuesta devuelva -14.

$$(g \circ f)(x) = -14$$

$$-9x^2 + 30x - 23 = -14$$

$$3x^2 - 10x + 3 = 0$$

Resolvamos esta cuadrática por factorización

$$3x^2 - 10x + 3 = 0$$

$$3x^2 - 9x - x + 3 = 0$$

$$3x(x - 3) - (x - 3) = 0$$

$$(x - 3)(3x - 1) = 0$$

Las soluciones resultan ser $x = 3$ y $x = \frac{1}{3}$.

Comprobemos, esta vez, usando las funciones en su forma inicial, y no la cuadrática resultante

$$(g \circ f)(3) = g\big(f(3)\big)$$

$$= g(3 \cdot 3 - 5)$$

$$= g(4)$$

$$= 2 - 4^2$$

$$= -14$$

Si $x = \frac{1}{3}$

$$(g \circ f)\left(\frac{1}{3}\right) = g\left(f\left(\frac{1}{3}\right)\right)$$

$$= g\left(3 \cdot \frac{1}{3} - 5\right)$$

$$= g(-4)$$

$$= 2 - (-4)^2$$

$$= -14$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

A continuación, se solicita resolver tres ejercicios para que practiques. Recuerda hacer lo siguiente:

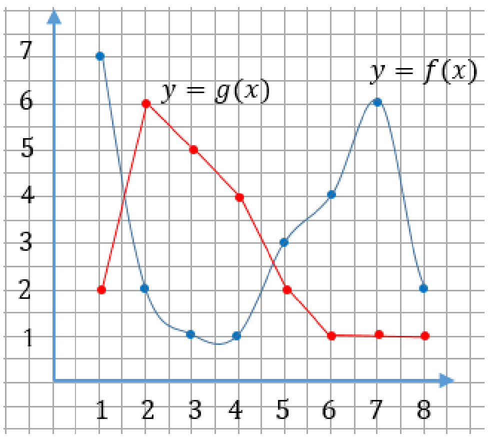
- Resuélvelas siguiendo los pasos utilizados en los ejemplos resueltos.
- Si es necesario, apóyate con los apuntes expuestos al inicio.
- Si surgen dudas, regístralas para luego consultar con el tutor.
- ¡Buen trabajo!

1) A continuación, se presenta la gráfica de dos funciones f y g, ambas en el primer cuadrante. A partir de ella determine el valor de

a) $(\boldsymbol{f \circ g})(\mathbf{1})$

b) $(\boldsymbol{g \circ f})(\mathbf{4})$

c) $(\boldsymbol{f \circ g})(\mathbf{4})$



2) Encuentre la función compuesta $(f \circ g)(x)$ para $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = x^2$.

3) Encuentre la compuesta $(g \circ f)(x)$ para las funciones f y g del ítem anterior.

Respuestas

Ítem 1)

a) $(f \circ g)(1)$=2
b) $(g \circ f)(4)$=2
c) $(f \circ g)(4)$=1

Ítem 2)

$(f \circ g)(x) = 2x^2 + 1$

Ítem 3

$(g \circ f)(x) = 4x^2 + 4x + 1$

SÍNTESIS

Una **función compuesta** se obtiene a partir de dos funciones que actúan de manera consecutivas.

La siguiente definición es a la vez una herramienta a la hora de determinar la expresión algebraica de una compuesta.

Dadas dos funciones f y g, la función compuesta $f \circ g$ (también llamada composición de f y g) está definida por

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$$

Stewart et al., 2012.

El requisito fundamental para realizar la composición $(f \circ g)(x)$ es que tanto $g(x)$ como $f\big(g(x)\big)$ estén definidas. Además, considera que la función que actúa primero es la que se anota a la derecha.

Los respectivos valores de una función compuesta pueden calcularse si conocemos ambas funciones, o bien si tenemos a disposición ambas gráficas y de ellas podemos extraer la información suficiente para calcular las imágenes solicitadas.

BIBLIOGRAFÍA

- Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (2012). Precálculo. *Matemáticas para el cálculo. Cengage Learning Editores, SA*.

¿Quieres recibir orientación para optimizar tu estudio en la universidad?

CONTAMOS CON PROFESIONALES EXPERTOS EN
EL APRENDIZAJE QUE TE PUEDEN ORIENTAR

SOLICITA NUESTRO APOYO

Sitio Web de CIMA

Ver más fichas

Solicita más información

TALCA
UNIVERSIDAD
CHILE

CIMA
UNIDAD DE
ACOMPAÑAMIENTO
ESTUDIANTIL