UNIVERSIDAD DE TALCA CHILE

Ecuaciónde la recta tangente

MATEMÁTICAS

VICERRECTORÍA DE PREGRADO
CIVE DIRECCIÓN DE CICLO DE VIDA ESTUDIANTIL
CIMA UNIDAD DE ACOMPAÑAMIENTO ESTUDIANTIL
PACE PROGRAMA DE ACCESO A LA EDUCACIÓN SUPERIOR
Ministerio de Educación

RUTA DE APRENDIZAJE

- En este documento aprenderás a determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto dado, haciendo uso de la derivada.

Funciones → Límites → **Derivadas** → Integrales

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

El problema de la recta tangente es uno de los cuatro bajo los cuales se desarrolló el cálculo durante el siglo XVII. Si bien Pierre de Fermat, René Descartes, Chrystian Huygens e Isaac Barrow propusieron soluciones para este, es a Isaac Newton y a Gottfried Leibniz a quienes se les atribuye la primera solución general (Larson & Edwards, 2010).

Los otros problemas que dan origen al cálculo son:

El problema de la velocidad y la aceleración.

El problema de los máximos y mínimos.

El problema del área.

LA RECTA TANGENTE

La cuestión ahora es entender a qué nos referimos cuando hablamos de recta tangente a una curva en un punto dado. Esto es claro cuando hablamos de una tangente a una circunferencia, pues se trata de la recta perpendicular al radio, que pasa por el punto P, como muestra la figura

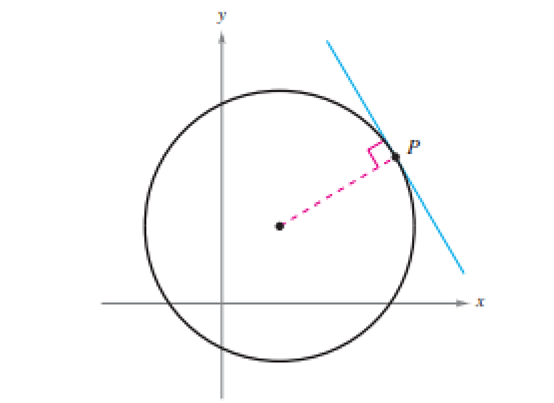


Figura 1

Recta tangente a una circunferencia.

Sin embargo, en una curva general el problema se complica. Por ejemplo, ¿cómo se podrían definir las rectas tangentes que se observan en la figura 2? Afirmando que una recta es tangente a una curva en un punto P si toca a la curva en P sin atravesarla. Tal definición sería correcta para la primera curva de la figura 2, pero no para la segunda. También se podría decir que una recta es tangente a una curva si la toca o hace intersección en ella exactamente en el punto P, definición que serviría para una circunferencia pero no para curvas más generales, como sugiere la tercera curva de la figura 2 (Larson & Edwards, 2010).

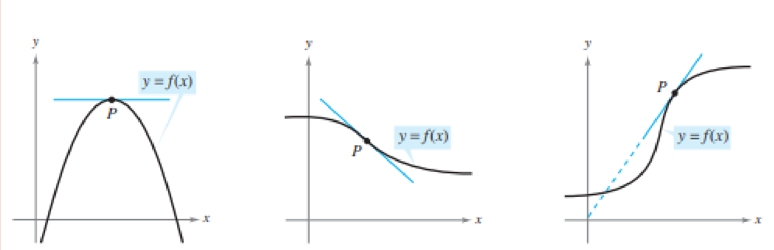


Figura 2

Recta tangente a una curva en un punto.

En esencia, el problema de encontrar la recta tangente en un punto P se reduce al de calcular su pendiente en ese punto. Se puede aproximar la pendiente de la recta tangente usando la recta secante que pasa por P y por otro punto cercano de la curva, como se muestra en la figura 3. Si $(c, f(c))$ es el punto de tangencia y $\left(c+\Delta x,\ f(c+\Delta x)\right)$ es el otro punto de la gráfica de f, la pendiente de la recta secante que pasa por ambos puntos se encuentra sustituyendo en la fórmula

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_{sec} = \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{(c+\Delta x) - c} \qquad \frac{\text{Cambio en } y}{\text{Cambio en } x}.$$

$$\boxed{m_{sec} = \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}.} \qquad \text{Pendiente de la recta secante.}$$

El miembro de la derecha en esta ecuación es un cociente de incremento o de diferencias. El denominador Δx es el cambio (o incremento) en x y el numerador $\Delta y = f(c+\Delta x) - f(c)$ es el cambio (o incremento) en y (Larson & Edwards, 2010).

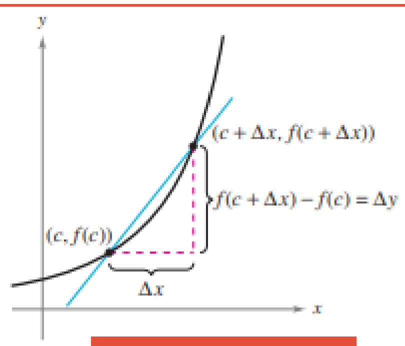


Figura 3

Recta secante que pasa por $(c, f(c))$ y

$(c+\Delta x, f(c+\Delta x))$

La belleza de este procedimiento radica en que se pueden obtener más aproximaciones y más precisas de la pendiente de la recta tangente tomando puntos de la gráfica cada vez más próximos al punto P de tangencia, como se muestra en la figura 4.

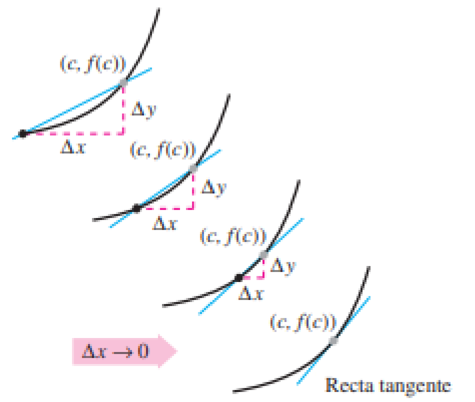


Figura 4

Aproximaciones a la recta tangente

DEFINICIÓN DE RECTA TANGENTE EN UN PUNTO

DEFINICIÓN DE LA RECTA TANGENTE CON PENDIENTE m

Si f está definida en un intervalo abierto que contiene a c y además existe el límite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = m$$

entonces la recta que pasa por $(c, f(c))$ y cuenta con una pendiente m es la **recta tangente** a la gráfica de f en el punto $(c, f(c))$.

ECUACIÓN DE LA RECTA

Un estudiante ya iniciado en un curso de cálculo habrá notado que la definición anterior corresponde a la derivada de una función en un punto dado, es decir

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'(c)$$

Ecuación de la recta

Recordemos que el modelo de ecuación punto-pendiente de la recta que pasa por el punto (x_1, y_1) y tiene pendiente m es

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

En el caso de la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función, que pasa por el punto $(c, f(c))$ y tiene pendiente $f'(c)$, su equivalente en el mundo del cálculo es

$$y - f(c) = f'(c)(x - c)$$

A continuación, te damos una secuencia de pasos que te guiará para determinar la ecuación de una recta tangente a la gráfica de una función en un punto dado.

1. Encuentra la primera derivada de la función.
2. Reemplaza el valor indicado de x en la derivada para calcular la pendiente.
3. Si no conoces la coordenada y del punto de tangencia, reemplaza el valor de x en la función.
4. Combina la pendiente del paso 2 y el punto hallado en el paso 3, reemplazándolos en la fórmula de la ecuación punto pendiente.

EJERCICIOS RESUELTOS

A continuación, se presentan ejercicios resueltos con sus procedimientos, en estos se sugiere hacer lo siguiente:

- Lee comprensivamente.
- Revisa el paso a paso.
- Destaca lo que te resulte importante.
- Destaca lo que te genere dudas y luego consulta al tutor.

Ejemplo 1

Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $\boldsymbol{f(x) = 2x^2 - 2x + 1}$
En el punto donde $\boldsymbol{x = 5}$.

Resolvamos siguiendo la secuencia de pasos definida anteriormente

1. Derivemos

$$f'(x) = 4x - 2$$

2. Ahora evaluemos $x = 5$ en la derivada

$$f'(5) = 4 \cdot 5 - 2 = 18$$

Es decir, buscamos la ecuación de una recta de pendiente 18.

3. Para saber cuál es el punto de tangencia, reemplacemos $x = 5$ en la función

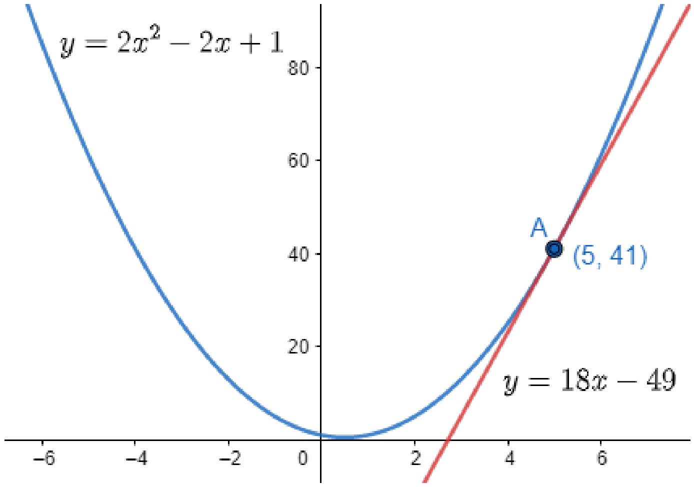
$$f(5) = 2(5)^2 - 2 \cdot 5 + 1$$
$$f(5) = 41$$

Entonces el punto de tangencia es $(5, 41)$.

4. Para encontrar la ecuación reemplacemos $f'(5) = 18$ y $\big(c, f(c)\big) = (5, 41)$ en la ecuación punto-pendiente

$$y - f(c) = f'(c)(x - c)$$
$$y - 41 = 18(x - 5)$$
$$y = 18x - 90 + 41$$
$$y = 18x - 49$$

A continuación, en la gráfica se puede observar la recta tangente obtenida en el ejemplo.



Gráfica de $y = 2x^2 - 2x + 1$ y su recta tangente en el punto $(5, 41)$

Ejemplo 2

Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{3 - x^3}}$ en el punto $\boldsymbol{(-1, 2)}$

1. Comencemos derivando, escribamos la función con notación de potencias y luego apliquemos regla de la cadena

$$f(x) = (3 - x^3)^{1/2}$$

La derivada es

$$f'(x) = \frac{1}{2}(3 - x^3)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (3 - x^3)'$$

Que luego de ser manipulada algebraicamente se transforma en

$$f'(x) = -\frac{3x^2}{2\sqrt{3 - x^3}}$$

2. Procedamos ahora a evaluar la derivada en la coordenada x del punto en cuestión, es decir, en $x = -1$

$$f'(-1) = -\frac{3(-1)^2}{2\sqrt{3 - (-1)^3}}$$

$$f'(-1) = -\frac{3}{2\sqrt{4}} = -\frac{3}{4}$$

Como ya sabemos que el punto en cuestión es $(-1, 2)$, podemos obviar el paso 3.

4.Reemplazar directamente el punto junto a la pendiente en la ecuación punto-pendiente.

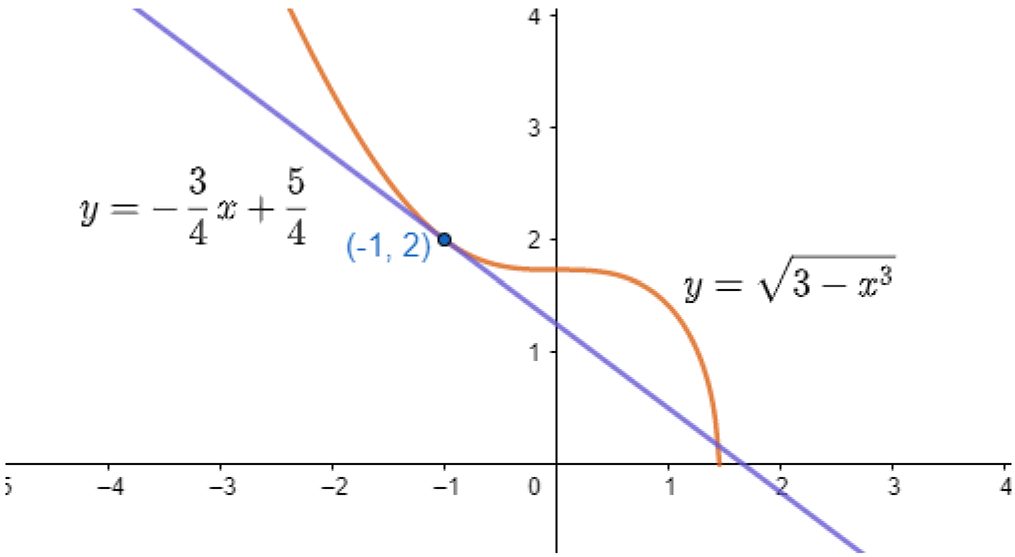
$$y - f(c) = f'(c)(x - c)$$

$$y - 2 = -\frac{3}{4}(x - (-1))$$

$$y - 2 = -\frac{3}{4}(x + 1)$$

$$y = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{4} + 2$$
$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$$

A continuación, en la gráfica se puede observar la recta tangente obtenida en el ejemplo.



Gráfica de $y = \sqrt{3 + x^3}$ y de su recta tangente $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$ en el punto $(-1,2)$.

Ejemplo 3 Caso especial, la tangente es una recta horizontal

Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2 + \frac{16}{x}$ en el punto donde la abscisa es 2.

1. Al igual que en los casos anteriores, derivemos la función

$$f'(x) = 2x - \frac{16}{x^2}$$

2. Si reemplazamos la abscisa $x = 2$ resulta

$$f'(x) = 2 \cdot 2 - \frac{16}{2^2}$$

$$f'(x) = 4 - 4 = 0$$

Esta pendiente nula es completamente esperable, pues toda recta horizontal tiene pendiente cero.

3. Para conocer el punto donde se produce la tangencia, debemos reemplazar $x = 2$ en la función

$$f(2) = 2^2 + \frac{16}{2}$$

$$f(2) = 12$$

Entonces el punto de tangencia es $(2, 12)$.

4. Calculemos la ecuación de la recta tangente reemplazando en la ecuación punto-pendiente

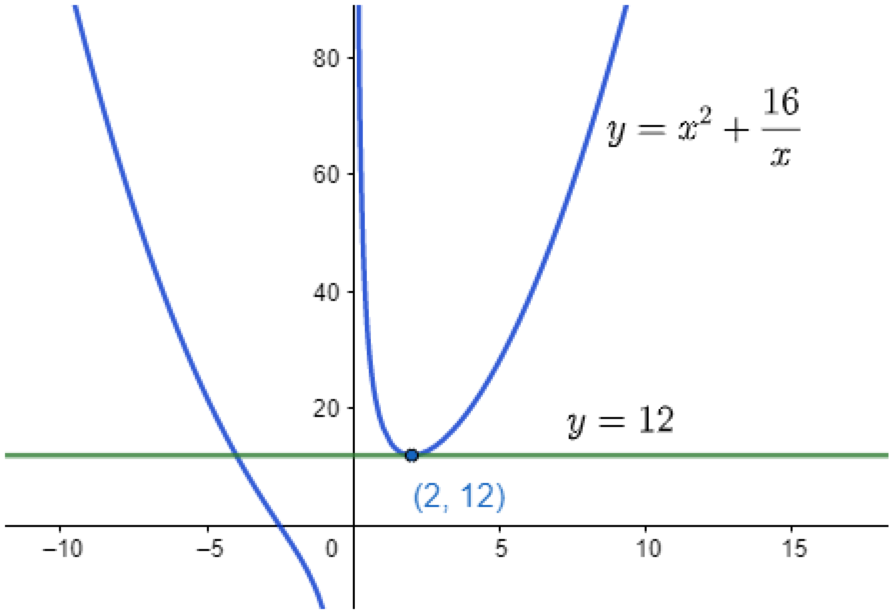
$$y - f(c) = f'(c)(x - c)$$

$$y - 12 = 0 \cdot (x - 2)$$

$$y - 12 = 0$$

$$y = 12$$

La ecuación de cualquier recta horizontal es $y = k$ con k una constante real, como muestra la figura 7.



Gráfica de $y = x^2 + \frac{16}{x}$ y su recta tangente horizontal de ecuación $y = 12$ en el punto $(2, 12)$

PRUEBA TUS CONOCIMIENTOS

A continuación, se presentan ejercicios propuestos para que puedas resolver y practicar, recuerda hacer lo siguiente:

- Resuélvelos siguiendo los pasos utilizados en los problemas resueltos.
- Si es necesario apóyate con los apuntes.
- Si surgen dudas, registrarlas para luego consultar con el tutor.
- ¡Buen trabajo!

1. Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^3 + \frac{48}{x}$ en el punto donde la abscisa es 4.
2. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función del ejercicio anterior, pero esta vez en el punto cuya primera coordenada es $x = -2$.

3. Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función siguiente, en el punto de abscisa 8.

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{2}{3}}$$

Respuestas

1. $y = 45x - 104$
2. $y = 32$
3. $y = \frac{5}{48}x + \frac{11}{12}$

SÍNTESIS

El problema de la recta tangente es uno de los cuatro bajo los cuales se desarrolló el cálculo. La pendiente de esta recta se define mediante el siguiente límite

DEFINICIÓN DE LA RECTA TANGENTE CON PENDIENTE m

Si f está definida en un intervalo abierto que contiene a c y además existe el límite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = m$$

entonces la recta que pasa por $(c, f(c))$ y cuenta con una pendiente m es la **recta tangente** a la gráfica de f en el punto $(c, f(c))$.

En buenas cuentas, calcular la pendiente de la tangente se reduce a encontrar la derivada de una función y evaluarla en un valor específico.

La ecuación de una recta con pendiente m y que pasa por el punto (x_1, y_1) viene dada por la expresión

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Desde el punto de vista del cálculo, si hablamos de una función $f(x)$ que tiene derivada $f'(x)$ y pasa por el punto $(c, f(c))$, la ecuación de la recta tangente en dicho punto se obtiene mediante la expresión

$$y - f(c) = f'(c)(x - c)$$

Para resolver ejercicios donde debamos determinar la ecuación de la recta tangente, te recomendamos seguir los siguientes pasos:

1. Encuentra la primera derivada de la función.
2. Reemplaza el valor indicado de x en la derivada para calcular la pendiente.
3. Si no conoces la coordenada y del punto de tangencia, reemplaza el valor de x en la función.
4. Combina la pendiente del paso 2 y el punto hallado en el paso 3, reemplazándolos en la fórmula de la ecuación punto pendiente.

REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA

Larson, R. E., Hostetler, R. P., Edwars, B. H. (2006). Cálculo con geometría analítica.McGrawHill.

¿Quieres recibir orientación para optimizar tu estudio en la universidad?

CONTAMOS CON PROFESIONALES EXPERTOS EN
EL APRENDIZAJE QUE TE PUEDEN ORIENTAR

SOLICITA NUESTRO APOYO

Sitio Web de CIMA

Ver más fichas

Solicita más información

TALCA
UNIVERSIDAD
CHILE

CIMA
UNIDAD DE
ACOMPAÑAMIENTO
ESTUDIANTIL