UNIVERSIDAD TALCA CHILE

Optimización

MATEMÁTICA

Vicerrectoría de Pregrado
CIVE Dirección de Ciclo de Vida Estudiantil
CIMA Unidad de Acompañamiento Estudiantil
PACE Programa de Acceso a la Educación Superior
Ministerio de Educación

RUTA DE APRENDIZAJE

- El aprendizaje esperado en este documento es aplicar derivadas a través de optimización.
- Este tema está inserto en Cálculo, estructurándose con el siguiente esquema:

Derivadas → Criterio de la primera derivada → Criterio de la segunda derivada → Optimización

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

En ciencia, ingeniería, negocios u otros contextos se tiene a menudo el interés en los valores máximo y mínimo de una función, por ejemplo, un empresario quiere minimizar los costos y maximizar las ganancias. Un viajero quiere minimizar el tiempo de transporte. El principio de Fermat en óptica establece que la luz sigue el camino que toma el menor tiempo (Stewart,2018).

En este documento se presenta algunas directrices para resolver estos tipos de problemas donde necesitemos maximizar o minimizar algunas situaciones como las nombradas anteriormente.

OPTIMIZACIÓN

Para la resolución de problemas de optimización lo más complejo suele ser establecer la función que nos piden maximizar o minimizar.

DIRECTRICES PARA RESOLVER PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

1. **Comprender el problema:** Lea el problema con atención; luego léalo de nuevo y subraye. Algunas preguntas que puede realizarse son: ¿Qué es lo que se desconoce?, ¿Cuáles son las cantidades conocidas?, ¿Cuáles son las condiciones dadas?
2. **Elabore un bosquejo:** En gran parte del problema de optimización resulta útil elaborar un bosquejo de la situación de nuestro problema e identificar en este las cantidades y/o variables dadas y las cantidades requeridas.
3. **Introduzca la notación:** Asigne un símbolo a la cantidad que va a ser maximizada o minimizada (Por ejemplo, V en el caso que se trate de un volumen). También, seleccione variables (a,b,c,…,x,y) para otras cantidades desconocidas y escríbalos en su bosquejo con estas variables. Puede ser provechoso utilizar iniciales como variables sugerentes, por ejemplo, P para el perímetro, h para la altura, t para el tiempo, entre otros.
4. Use todas las **variables** necesarias para establecer la función. En el caso que utilice más de una variable, aplique las restricciones identificadas para reducir la función a una variable.
5. Escriba el dominio de esta función, es decir, anote el intervalo en que está definida la función.
6. Determine todos los números críticos ($f'(x) = 0$).
7. Si la función es **continua** y está definida sobre un **intervalo cerrado** $[a, b]$, entonces compruebe los extremos en punto frontera. Si el extremo deseado no ocurre en un punto frontera, debe ocurrir en un número crítico en el intervalo abierto (a, b). Es decir, en el caso de un intervalo cerrado $[a, b]$, reemplazar en la función planteada los extremos del intervalo y los puntos críticos, para determinar el máximo o mínimo absoluto.

   Si la función planteada está definida sobre un **intervalo no cerrado**, entonces es necesario aplicar un criterio de la derivada en cada valor crítico en ese intervalo.

Recordando

CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA

Sea f una función para la cual f'' existe sobre (a, b) que contiene al número crítico c.

- Si $f''(c) > 0$, entonces $f(c)$ es un **mínimo** local o relativo.
- Si $f''(x) < 0$, entonces $f(c)$ es un **máximo** local o relativo.

EJERCICIOS RESUELTOS

A continuación, se presentan ejercicios resueltos con sus procedimientos. En estos se sugiere hacer lo siguiente:

- Lee comprensivamente.
- Revisa el paso a paso.
- Destaca lo que te resulte importante.
- Destaca lo que te genere dudas y luego consulta al tutor.

EJEMPLO 1: (Stewart et al., 2007)

Un agricultor tiene 1200 m de material y quiere construir una malla para cercar un campo rectangular que bordea un río recto, de modo que no necesita malla a lo largo del río. ¿Cuáles son las dimensiones que debe tener el campo para encerrar el área más grande?

Solución:

Siguiendo los pasos anteriormente detallados en este documento:

1. Comenzamos luego de leer el enunciado del problema. Para comprender mejor el problema, y hacerse una idea de lo que está sucediendo en este problema, se va a experimentar con algunos casos especiales. Podemos observar en la figura 1 tres formas de posibles arreglos de 1200 m de material.

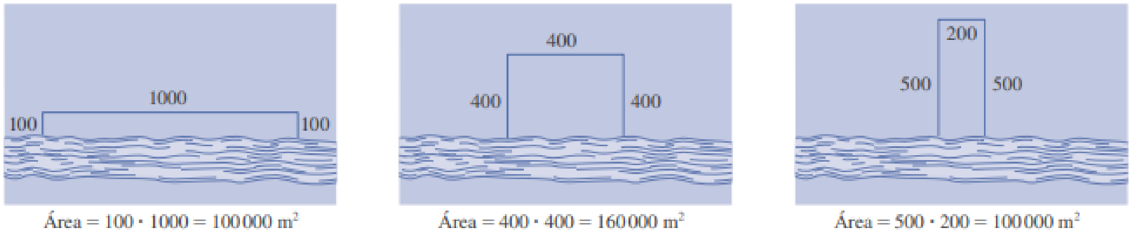

Figura 1: Casos especiales para cercar (Stewart et al., 2007)

Se ve que cuando se intentan campos muy anchos y poco largos, o campos angostos y muy largos, se obtienen áreas relativamente pequeñas.

2. A continuación, realizamos un bosquejo para un caso general (ver figura 2)

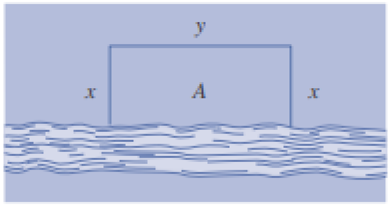

Figura 2: Bosquejo ejemplo 2 (Stewart et al., 2007)

3. Se quiere maximizar el área A del rectángulo. Por lo tanto, sea x e y el largo y el ancho respectivamente del rectángulo (en metros). Entonces, se quiere expresar A en términos de x e y, recordando que el área de un rectángulo se calcula del producto de ancho y largo.

$$A = x \cdot y \qquad (1)$$

4. Se requiere expresar A en función de una sola variable. Para esto, utilizamos la información dada de que la longitud total de la malla es 1200 m, luego:

$$2x + y = 1200$$

De esta ecuación se despeja y, por lo que:

$$\mathbf{y = 1200 - 2x} \qquad \mathbf{(2)}$$

Reemplazando (2) en (1)

$$\boldsymbol{A = x \cdot (1200 - 2x)}$$

$$A = 1200x - 2x^2$$

5. Observe que $\boldsymbol{x \geq 0}$ y $\boldsymbol{x \geq 600}$ (de lo contrario A será **negativo**), por lo tanto, la función que se desea maximizar es:

$$\boldsymbol{A(x) = 1200x - 2x^2} \qquad \boldsymbol{0 \leq x \leq 600}$$

6. Para determinar todos los puntos críticos, derivamos la función y luego igualamos a cero.

$$A'(x) = 1200 - 2 \cdot 2x$$
$$A'(x) = 1200 - 4x$$

Así,

$$\boldsymbol{1200 - 4x = 0}$$
$$-4x = -1200$$
$$x = 300$$

7. Dado que, la función es continua y está definida sobre un intervalo cerrado $[0{,}600]$, el valor máximo de A se debe producir en el punto crítico x=300 o en un punto extremo del intervalo. Es decir, reemplazamos $x = 0$, $x = 300$ y $x = 600$ en nuestra función $A(x) = 1200x - 2x^2$

$$A(0) = 1200 \cdot 0 - 2 \cdot 0^2 = 0$$
$$A(300) = 1200 \cdot 300 - 2 \cdot (300)^2 = 180.000 \longrightarrow \text{Máximo}$$
$$A(600) = 1200 \cdot 600 - 2 \cdot (600)^2 = 0$$

El método del intervalo cerrado da el valor máximo cuando $\boldsymbol{A(300) = 180.000}$

Alternativamente, se podría haber observado que $A''(x) = -4 < 0$, para toda x, por lo que A es siempre cóncava hacia abajo y el máximo local en $x = 300$ debe ser un máximo absoluto.

Por lo tanto, las dimensiones que debe tener el campo para encerrar el área más grande es 300 m de largo y 600 m de ancho.

EJEMPLO 2: (Stewart et al., 2007)

Encuentre el área del rectángulo más grande que puede inscribirse en una semicircunferencia de radio r.
Solución:

1. Para comenzar, tomamos la semicircunferencia como la mitad superior de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ con centro en el origen. Entonces la palabra ***inscrito*** significa que el rectángulo tiene dos de sus vértices sobre la semicircunferencia y los otros sobre el eje x.
2. Lo anterior mencionado se puede visualizar con el siguiente bosquejo

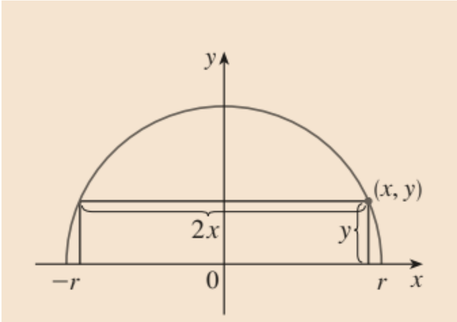

Figura 3: Bosquejo ejemplo 2 (Stewart et al., 2007)

3. Sea (x, y) el vértice que se encuentra en el primer cuadrante. En tal caso el rectángulo tiene lados de longitudes $2x$ e y, de manera que su área es:
$$\mathbf{A = 2xy \quad (1)}$$
4. Se requiere expresar $\boldsymbol{A}$ en función de una sola variable, para esto utilizamos la información dada de que el rectángulo está inscrito en la semicircunferencia, por lo que (x, y) se encuentra sobre la circunferencia $\boldsymbol{x^2 + y^2 = r^2}$, por consiguiente, $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. De esta forma, reemplazamos en (1)
$$\boldsymbol{A = 2x\sqrt{r^2 - x^2}}$$
5. Observe que el dominio de esta función $\boldsymbol{0 \le x \le r}$, por lo tanto, la función que se desea maximizar es:
$$\boldsymbol{A = 2x\sqrt{r^2 - x^2} \quad , \ 0 \le x \le r}$$
6. Para determinar todos los puntos críticos, derivamos la función y luego igualamos a cero. Pero antes de derivar, expresamos la raíz como potencia:
$$\boldsymbol{A = 2x \cdot (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Ahora **derivamos** la función utilizando regla del producto y regla de la cadena.

$$A' = 2\cdot(r^2-x^2)^{\frac{1}{2}} + 2x\cdot\frac{1}{2}(r^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot -2x$$

$$A' = 2\sqrt{r^2-x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

$$A' = \frac{2\sqrt{r^2-x^2}\cdot\sqrt{r^2-x^2}}{\sqrt{r^2-x^2}} - \frac{2x^2}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

$$A' = \frac{2(r^2-x^2)-2x^2}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

Ahora igualando a **cero**,

$$\frac{2(r^2-x^2)-2x^2}{\sqrt{r^2-x^2}} = 0$$

$$2(r^2-x^2)-2x^2 = 0 \qquad \text{con } r^2 \neq x^2$$

$$2r^2-2x^2-2x^2 = 0$$

$$-4x^2 = -2r^2$$

$$x^2 = \frac{-2r^2}{-4}$$

$$x^2 = \frac{r^2}{2}$$

$$x = \pm\frac{r}{\sqrt{2}}$$

Pero $x \geq 0$, por lo tanto

$$\boldsymbol{x = \frac{r}{\sqrt{2}}}$$

7. Dado que, la función es continua y está definida sobre un intervalo cerrado $[0, r]$, el valor máximo de A se debe producir en el punto crítico $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$ o un punto extremo del intervalo. Es decir, reemplazamos para $x = 0$, $x = r$ y $x = \frac{r^2}{\sqrt{2}}$ en nuestra función $\boldsymbol{A(x) = 2x\sqrt{r^2-x^2}}$

$$A(0) = 2\cdot 0\cdot\sqrt{r^2-0^2} = 0$$

$$A(r) = 2\cdot r\cdot\sqrt{r^2-r^2} = 0$$

$$A\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right) = 2\cdot\frac{r}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{r^2-\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2} = 2\frac{r}{\sqrt{2}}\sqrt{r^2-\frac{r^2}{2}} = 2\frac{r}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2r^2-r^2}{2}} = \frac{2r\cdot\sqrt{r^2}}{\sqrt{4}} = \frac{\cancel{2}r\cdot r}{\cancel{2}} = \underset{\text{Máximo}}{r^2}$$

Por lo tanto, el área del rectángulo inscrito más grande es r^2

PRUEBA TUS CONOCIMIENTOS

A continuación, se presentan ejercicios propuestos para que puedas resolver y practicar. Recuerda hacer lo siguiente:

- Resuélvelos siguiendo los pasos utilizados en los problemas resueltos.
- Si es necesario, apóyate con los apuntes.
- Si surgen dudas, regístralas para luego consultar con el tutor.
- ¡Buen trabajo!

1. Un agricultor quiere cercar un área de 15 000 m^2 en un terreno rectangular y luego dividirlo por la mitad, con una cerca paralela a uno de los lados del rectángulo. ¿Cómo puede el agricultor hacer esto para minimizar el costo de la cerca? (Stewart., 2018).

2. Si se dispone de 1200 cm^2 de material para hacer una caja con una base cuadrada y sin tapa; encuentre el mayor volumen posible de la caja. (Stewart., 2018).

3. Encuentre las dimensiones del triángulo isósceles de mayor área que se puede inscribir en un círculo de radio r. (Stewart., 2018).

Respuestas:

1. 100 metros por 150 metro (*se utiliza el criterio de la segunda derivada para determinar que es mínima).*
2. 4000 cm^3
3. Las dimensiones del triángulo isósceles para un máximo de área inscrito en un círculo son: Base $\sqrt{3}r$ y altura $\frac{3r}{2}$

SÍNTESIS

Para resolver problemas de optimización en este documento utilizamos los siguientes pasos:

1. Comprender el problema
2. Elaborar un bosquejo
3. Introducir notaciones
4. Establecer la función
5. Identificar el dominio de la función
6. Determinar los puntos críticos
7. Utilizar alguna regla para determinar el máximo o mínimo de la función

BIBLIOGRAFÍA

Stewart, J.,Redlin, L.,Watson, S. (2007). *Precálculo: Matemáticas para el cálculo.* Cengage Learning. (5ª ed.)

Stewart, J. (2018). *Cálculo transcendentes tempranas.* Cengage. (8ª ed.)

¿Quieres recibir orientación para optimizar tu estudio en la universidad?

CONTAMOS CON PROFESIONALES EXPERTOS EN
EL APRENDIZAJE QUE TE PUEDEN ORIENTAR

SOLICITA NUESTRO APOYO

Sitio Web de CIMA

Ver más fichas

Solicita más información

UNIVERSIDAD DE TALCA CHILE

CIMA UNIDAD DE ACOMPAÑAMIENTO ESTUDIANTIL