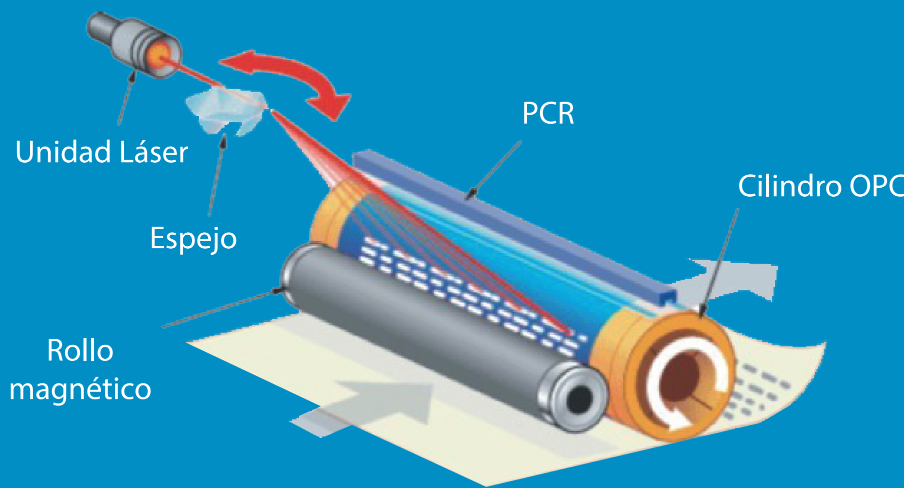


Flujo Eléctrico y Ley de Gauss

Física

Vicerrectoría de Pregrado
CIVE Dirección de Ciclo de Vida Estudiantil
CIMA Unidad de Acompañamiento Estudiantil
PACE Programa de Acceso a la Educación Superior
Ministerio de Educación

RUTA DE APRENDIZAJE

- Con este documento se espera reforzar los conceptos asociados al flujo eléctrico y la ley de Gauss.
- Este tema está inserto en la unidad de electricidad.

Campos eléctricos → Ley de Gauss → Potencial eléctrico → Capacitancia → Corriente → Circuitos → Magnetismo

ÍNDICE

- Introducción
- Flujo eléctrico
- Ley de Gauss
- Problemas resueltos
- Problemas propuestos
- Síntesis

INTRODUCCIÓN

En el documento “Fuerza y campo eléctrico”, se presentó campo eléctrico para cargas continuas y para distribución de cargas. En esta ficha, se describe otro procedimiento para calcular campos eléctricos.

La ley de Gauss parte de que la fuerza electrostática que existe entre cargas exhibe un comportamiento cuadrático inverso. A pesar de que se trata de una consecuencia de la ley de Coulomb, la ley de Gauss es más útil para calcular los campos eléctricos de distribuciones de carga muy simétricas y permite hacer razonamientos cualitativos al tratar con problemas complicados (Serway & Yewett, 2008).

Flujo eléctrico y ley de Gauss

Flujo eléctrico

El flujo eléctrico neto a través de una superficie cerrada es directamente proporcional a la carga neta en el interior de esa superficie (Young & Freedman, 2009).

El flujo eléctrico es proporcional al número de líneas de campo eléctrico que penetran una superficie. Si el campo eléctrico es uniforme y forma un ángulo θ con la normal a una superficie de área A, el flujo eléctrico a través de la superficie es **(ver figura 1 y 2)**

$$\emptyset_E = EAcos\theta \qquad (1)$$

Donde

$\emptyset_E$: flujo eléctrico [N m^2/C]

E: campo eléctrico [N/C]

θ: ángulo

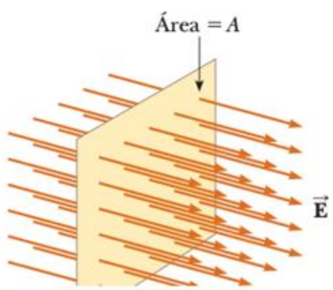
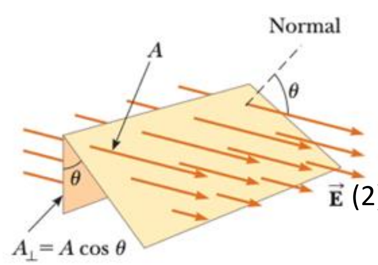


Figura 1. Líneas de campo que representan un campo eléctrico uniforme que penetra en un plano de área A perpendicular al campo. El flujo eléctrico $\emptyset_E$ que cruza esta superficie es igual a EA.

Figura 1



(2)

Figura 2. Líneas de campo que representan un campo eléctrico uniforme que penetra en un área A la cual forma un ángulo u en relación con el campo. Ya que el número de las líneas que atraviesan el área $A_\perp$ es igual al flujo que pasa a través de A y se conoce por $\emptyset_E = EAcosu$.

Figura 2

Recordando

En general, el flujo eléctrico a través de una superficie es

$$\emptyset_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Ley de Gauss

Una relación importante en electricidad es la ley de Gauss, desarrollada por el gran matemático Karl Friedrich Gauss (1777-1855). En ella **se relacionan la carga y el campo eléctrico**, y es una versión más general y elegante de la ley de Coulomb (Young & Freedman, 2009).

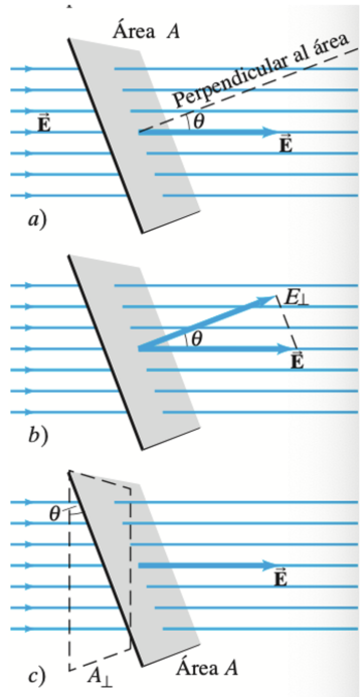
La ley de Gauss dice que **el flujo eléctrico neto $\emptyset_E$ a través de cualquier superficie gausiana cerrada es igual a la carga *neta* q_{in} dentro de la superficie, dividida por ϵ_0:**

$$\emptyset_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \qquad (3)$$

donde

ϵ_0: permitividad eléctrica en el vacío ($8{,}85 \times 10^{-12}\ C^2/N \cdot m^2$)

La ley de Gauss **sirve para determinar el campo eléctrico debido a distribuciones de cargas dadas, pero su utilidad está limitada principalmente a casos donde la distribución de carga exhibe mucha simetría**.



a) Un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$ que pasa a través de un área plana A.
b) $E_\perp = E\cos\theta$ es el componente de $\vec{E}$ perpendicular al plano de área A.
c) $A_\perp = A\cos\theta$ es la proyección (punteada) del área A perpendicular al campo $\vec{E}$.

Figura 3

Recordando

La ley de Gauss es útil para determinar campos eléctricos cuando la distribución de carga está caracterizada por un alto grado de simetría. Se debe encontrar una superficie que satisfaga una o más de las condiciones siguientes: (Serway & Yewett, 2008)

1. Demostrar por simetría que el valor del campo eléctrico es constante sobre la superficie.
2. Que el producto punto de la ecuación (3) se expresa como un producto algebraico simple EdA, ya que $\vec{E}$ y $\overrightarrow{dA}$ son paralelos entre sí.
3. Que el producto punto de la ecuación (3) es cero, ya que $\vec{E}$ y $\overrightarrow{dA}$ son perpendiculares entre sí.

PROBLEMAS RESUELTOS

A continuación, se presentan tres problemas resueltos con sus procedimientos, en estos problemas se sugiere hacer lo siguiente:

- Lee comprensivamente.
- Revisa el paso a paso.
- Destaca lo que te resulte importante.
- Destaca lo que te genere dudas y luego consulta al tutor.

Problema 1

Una pirámide de base horizontal cuadrada, de $6.00\ m$ de lado, y con una altura de $4.00\ m$, está colocada en un campo eléctrico vertical de $52.0\ N/C$. Calcule el flujo eléctrico total que pasa a través de las cuatro superficies inclinadas de la pirámide (Serway & Yewett, 2008).

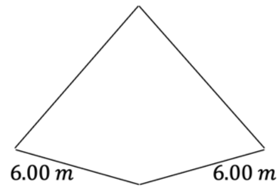
<u>Solución</u>

Paso 1: registrar los datos y realizar un esquema**.**

$\boldsymbol{E = 52.0\ N/C}$

$\boldsymbol{l = 6.00\ m}$

$\boldsymbol{h = 4.00\ m}$



Paso 2: calcular el área de la base cuadrada.

$$\boldsymbol{A = l^2}$$
$$\boldsymbol{A = 6^2}$$
$$\boldsymbol{A = 36\ m^2}$$

Paso 3: reemplazar los datos.

$$\boldsymbol{\emptyset_E = EA}$$
$$\boldsymbol{\emptyset_E = 52.0 \cdot 36}$$
$$\boldsymbol{\emptyset_E = 1870\ N\,m^2/C}$$

Para las superficies inclinadas, $\boldsymbol{\emptyset_E = 1870\ N\,m^2/C}$

Problema 2

Las siguientes cargas están localizadas en el interior de un submarino: $5.00\ mC, -9.00\ mC, 27.0\ mC\ y\ -84.0\ mC$. (Serway & Yewett, 2008)

a. **Calcule el flujo eléctrico neto a través del casco submarino.**

b. **El número de líneas de campo eléctrico que salen en comparación con las que entran es: ¿mayor, igual o menor?**

Solución letra A

Se realiza transformación de unidades de inmediato.
Recordar que:
$1\ mC = 1x10^{-3}\ C$

Paso 1: registrar los datos.

$\boldsymbol{q_1 = 5\ mC = 5x10^{-3}C}$
$\boldsymbol{q_2 = -9\ mC = -9x10^{-3}C}$
$\boldsymbol{q_3 = 27\ mC = 27x10^{-3}C}$
$\boldsymbol{q_4 = -84\ mC = -84x10^{-3}C}$
$\boldsymbol{\epsilon_0 = 8,85x10^{-12}\ C^2/N \cdot m^2}$

Paso 2: reemplazar los datos.

$$\phi_E = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

$$\phi_E = \frac{(+5 - 9 + 27 - 84)x10^{-3})}{(8.85x10^{-12})}$$

$$\phi_E = -6.89x10^{9}\ N \cdot m^2/C$$

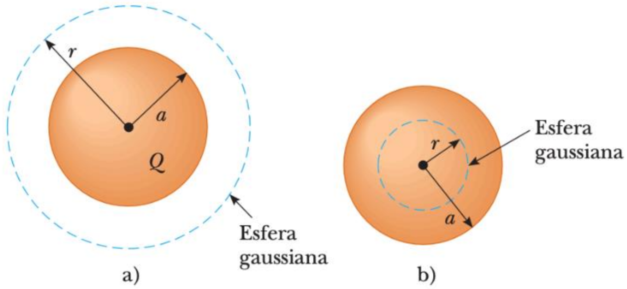
Solución letra B

Dado que el flujo eléctrico neto es negativo, entran más líneas de las que salen de la superficie.

Problema 3

Una esfera sólida aislante con radio a tiene una densidad de carga volumétrica uniforme r y tiene una carga positiva total Q como se muestra en la figura (Serway & Yewett, 2008).

a) Calcule la magnitud del campo eléctrico en un punto afuera de la esfera.
b) Encuentre la magnitud del campo eléctrico en un punto adentro de la esfera.



<u>Solución letra A. Punto afuera de la esfera.</u>

Paso 1: registrar los datos.

$\boldsymbol{radio = a}$
$\boldsymbol{densidad\ de\ carga\ volumétrica = r}$
$\boldsymbol{carga\ total = +Q}$

Paso 2: para reflejar la simetría esférica, elegiremos una superficie gaussiana esférica de radio $\boldsymbol{r}$, concéntrica con la esfera. La segunda condición se satisface en cualquier parte sobre la superficie y $\boldsymbol{\vec{E} \cdot dA = EdA}$.

$$\emptyset_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E dA = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Por simetría, E es constante en todas partes de la superficie, lo que satisface la condición 1), de modo que se puede retirar E de la integral:

$$\oint E dA = E \oint dA = E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

El área de una esfera es:
$A = 4\pi r^2$

Al resolver para E

Recordar que
$k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = k_e \frac{Q}{r^2} \quad \textbf{(para } r > a)$$

Solución letra B. Punto adentro de la esfera.

Paso 1. En este caso, se elegirá una superficie gaussiana esférica que tenga radio $r < a$, concéntrica con la esfera aislante. Sea V' el volumen de esta esfera más pequeña. Para aplicar la ley de Gauss en esta situación, se debe reconocer que la carga q_{in} dentro de la superficie gaussiana de volumen V' es menor que Q.

Calcular q_{in} usando $q_{in} = \rho V'$:

$$q_{in} = \rho V' = \rho(\frac{4}{3}\pi r^3)$$

El volumen de una esfera es:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Paso 2. Aplicar la ley de Gauss. Se cumple la condición 1) y 2) en toda la superficie gaussiana. Se aplicará en la región $r < a$.

$$\oint E dA = E \oint dA = E(4\pi r^2) = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

Resolver para E y sustituir para q_{in}

$$E = \frac{q_{in}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$E = \frac{\rho(\frac{4}{3}\pi r^3)}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Simplificar el $4, \pi$ y r^2

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r$$

De la primera ecuación

$$q_{in} = \rho(\frac{4}{3}\pi r^3)$$

Como la región será un $r < a$, se reemplazará r por a y q_{in} por Q.

$$Q = \rho(\frac{4}{3}\pi a^3)$$

Despejar ρ

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3}$$

Sustituir $\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3}$ **y** $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k_e}$

$$E = \frac{\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3}}{3\frac{1}{4\pi k_e}r}$$

$$E = k_e\frac{Q}{a^3}r \ (para\ r < a)$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

A continuación, se presentan tres problemas propuestos para que puedas resolver y practicar. Recuerda hacer lo siguiente:

- Resuélvelos siguiendo los pasos utilizados en los problemas resueltos.
- Si es necesario, apóyate con los apuntes.
- Si surgen dudas, regístralas para luego consultar con el tutor.
- ¡Buen trabajo!

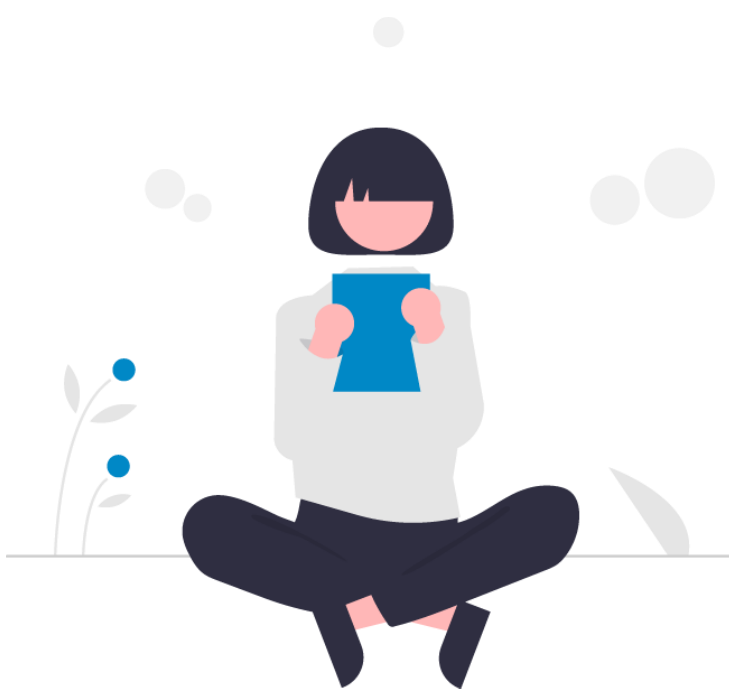
1. En un campo eléctrico uniforme, se hace girar una espira de $40.0\ cm$ de diámetro hasta encontrar la posición en la cual existe el máximo flujo eléctrico. El flujo en esta posición tiene un valor de $5.20\ x\ 10^5 N \cdot m^2/C$. ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico? (Serway & Yewett, 2008).

2. Una carga de $170\ mC$ está en el centro de un cubo con una arista de $80.0\ cm$. Sin cargas en los alrededores (Serway & Yewett, 2008).
   a) Determine el flujo a través de cada una de las caras del cubo.
   b) Encuentre el flujo a través de la superficie total del cubo.

3. Una hoja con carga grande horizontal y plana tiene una carga por unidad de superficie de $9.00\ mC/m^2$. Determine el campo eléctrico justo por encima del centro de la hoja (Serway & Yewett, 2008).

Soluciones

1) $4.14\ x10^6 N/C$
2.a) $3.10x10^6 N \cdot m^2/C$
2.b) $19.2x10^6 N \cdot m^2/C$
3) $5.08x10^6 N/C$



SÍNTESIS

La ley de Gauss **sirve para determinar el campo eléctrico debido a distribuciones de cargas dadas, pero su utilidad está limitada principalmente a casos donde la distribución de carga exhibe mucha simetría**.

Las principales ecuaciones son:

Flujo eléctrico	$\emptyset_E = \int \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{A}}$
Ley de Gauss	$\emptyset_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$

BIBLIOGRAFÍA

- Serway, R & Jewett, J. (2008). *Física para ciencias e ingeniería volumen 2*. México: Cengage Learning.
- Young, H., & Freedman, Y. (2009). *Física universitaria, con física moderna volumen 2*. México: Pearson Educación.

¿Quieres recibir orientación para optimizar tu estudio en la universidad?

CONTAMOS CON PROFESIONALES EXPERTOS EN
EL APRENDIZAJE QUE TE PUEDEN ORIENTAR

SOLICITA NUESTRO APOYO

Sitio Web de CIMA

Ver más fichas

Solicita más información

TALCA UNIVERSIDAD CHILE

CIMA UNIDAD DE ACOMPAÑAMIENTO ESTUDIANTIL