TALCA UNIVERSIDAD CHILE

Derivadas de la Función Exponencial

MATEMÁTICA

Vicerrectoría de Pregrado
CIVE Dirección de Ciclo de Vida Estudiantil
CIMA Unidad de Acompañamiento Estudiantil
PACE Programa de Acceso a la Educación Superior
Ministerio de Educación

RUTA DE APRENDIZAJE

- En este documento se espera reforzar una de las derivadas que aparece con mayor frecuencia en cálculo: la de una función exponencial.
- Para comprender este tema es requisito tener desarrolladas tus habilidades algebraicas, así como nociones y fórmulas básicas de derivación, incluyendo la regla de la cadena para derivar funciones compuestas.

Funciones → Límites → Derivadas → Integrales

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

La primera forma de **derivar** que conocemos al enfrentarnos a un curso de cálculo es a partir de la **definición**, esto es, usando el siguiente ***límite***

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Si bien es evidente que el dominio de los *límites* debe ser previo al contenido presentado en este documento, también es claro que, en la práctica, **calcularlos puede ser un proceso lento**. Es por lo anterior que surge la **necesidad de manejar ciertas fórmulas** que hagan nuestro transitar por este mundo algo **más simple**. Una de las primeras fórmulas que se conoce es aquella que nos dice **cómo derivar una expresión donde la variable independiente está elevada a una constante real**

$$base\ variable^{exponente\ constante}$$

Para este caso, usamos:

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

Por ejemplo, la derivada de x^7 es $(x^7)' = 7x^6$. Sin embargo, a lo largo de esta ficha, **nos concentraremos en explicar cómo derivar aquellas funciones donde la variable independiente está en el exponente y la constante está en la base**

$$base\ constante^{exponente\ variable}$$

Este tipo de **funciones** son llamadas ***exponenciales*** y en general son de la forma:

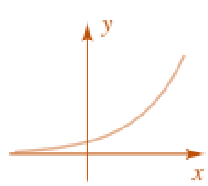
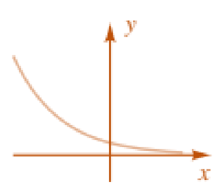
$$f(x) = a^x$$

Algunas de sus características se resumen en la Tabla 1.

Un **caso especial** de función exponencial ampliamente estudiado es aquel en que la **base es el número irracional *e***

$$f(x) = e^x$$

Tabla 1: La función exponencial, definida para números mayores que cero y distintos de 1. Su gráfica depende del intervalo donde se encuentre su base.

Terminología	Definición	Gráfica de f para $a > 1$	Gráfica de f para $0 < a < 1$
Función exponencial f con base a	$f(x) = a^x$ para toda x en $\mathbb{R}$, donde $a > 0$ y $a \neq 1$		

Recuerda además que e **es la base de los logaritmos naturales**, fue descubierto por **Jaco Bernoulli** en el estudio de intereses financieros, y su valor aproximado es 2,7182…

A continuación, nos dedicaremos a la cuestión de **derivar funciones exponenciales en distintas bases**, hasta llegar a un caso general.

Función exponencial de base e y exponente la función identidad

Esta corresponde a una de las fórmulas de derivadas más fácil de recordar. Sea $f(x) = e^x$, entonces su deriva es

$$(e^x)' = e^x$$

En palabras simples, la derivada de la función $f(x) = e^x$ es ella misma. Sin embargo, es usual que nos encontremos con funciones exponenciales que no sean la anterior, como por ejemplo e^{2x}, en cuyo caso la derivada no es ella misma.

Función exponencial de base e y exponente distinto a la identidad

Cuando necesitemos derivar una función exponencial de base e cuyo exponente no

sea la función identidad, utilizaremos la siguiente fórmula

$$\left(e^{g(x)}\right)' = g'(x) \cdot e^{g(x)}$$

Por ejemplo, al derivar $f(x) = e^{2x}$ se obtiene

$$(e^{2x})' = (2x)' \cdot e^{2x}$$
$$= 2e^{2x}$$

Función exponencial de base a y exponente la función identidad

Como se mencionó anteriormente, una **función exponencial** puede ser **en cualquier base positiva y distinta de 1**, no necesariamente e, por lo cual necesitamos una fórmula para derivar funciones de la forma $f(x) = a^x$. Es posible encontrar dicha fórmula tomando en cuenta dos propiedades de logaritmos y la fórmula del caso anterior:

$$b^{\log_b x} = x$$
$$\log_b x^n = n \log_b x$$

Apliquemos la primera propiedad a nuestra función, escogiendo un logaritmo natural

$$a^x = e^{\ln a^x}$$

Ahora, **derivemos a ambos** lados de la igualdad

$$a^x = e^{\ln a^x}$$
$$(a^x)' = \left(e^{\ln a^x}\right)'$$
$$(a^x)' = (\ln a^x)' \cdot e^{\ln a^x}$$

Aplicando la segunda propiedad de logaritmos al lado derecho de la igualdad, tenemos

$$(a^x)' = (\ln a^x)' \cdot e^{\ln a^x}$$

$$(a^x)' = (x \ln a)' \cdot e^{\ln a^x}$$

$$(a^x)' = \ln a \cdot e^{\ln a^x}$$

Por último, reescribiendo la exponencial del lado derecho, usando nuevamente la primera propiedad de logaritmos, resulta la fórmula:

$$(a^x)' = \ln a \cdot a^x$$

Por ejemplo, la derivada de $f(x) = 7^x$ es $f'(x) = \ln 7 \cdot 7^x$.

Función exponencial de base a y exponente una función cualquiera

Ahora estamos en condiciones de presentar una **fórmula** para derivar una **función exponencial en cualquier base y cuyo exponente sea una expresión cualquiera**, es decir, una función de la forma

$$f(x) = a^{g(x)}$$

Haciendo uso de la regla de la cadena, es posible probar que

$$\left(a^{g(x)}\right)' = g'(x) \cdot \ln a \cdot a^{g(x)}$$

Es importante notar que esta fórmula corresponde al **caso más general de la derivada de una función exponencial**, por lo tanto, **sirve para cualquier base y cualquier exponente**, en particular, cuando la base sea e y el exponente sea x, estaremos derivando nuestra ya conocida e^x, y el resultado sería:

$$(e^x)' = e^x$$

Comprobémoslo usando la fórmula general

$$(e^x)' = (x)' \cdot \ln e \cdot e^x$$

Pero como ya sabemos, $(x)' = 1$ y $\ln e = 1$, con lo cual

$$(e^x)' = e^x$$

Como era de esperar.

LEE Y ANALIZA LOS SIGUIENTES PROBLEMAS

A continuación, se presentan ejercicios resueltos con sus procedimientos, en estos problemas se sugiere hacer lo siguiente:

- Lee comprensivamente.
- Revisa el paso a paso.
- Destaca lo que te resulte importante.
- Destaca lo que te genere dudas y luego consulta al tutor.

Ejemplo 1

Encuentre la derivada de la siguiente función exponencial

$$f(x) = e^{x^2+2x-15}$$

Primero, nota que la base de la función es el número e, sin embargo, el exponente es una expresión polinómica distinta de x, por lo cual la derivada buscada no es la función misma. Para encontrarla, debemos usar la fórmula

$$\left(e^{g(x)}\right)' = g'(x) \cdot e^{g(x)}$$

Con $g(x) = x^2 + 2x - 15$. Procedamos:

$$f'(x) = \left(e^{x^2+2x-15}\right)' = (x^2 + 2x - 15)' \cdot e^{x^2+2x-15}$$

$$f'(x) = (2x + 2) \cdot e^{x^2+2x-15}$$

Ejemplo 2

Determine la derivada de la función exponencial

$$f(x) = 3^{\cos x}$$

Esta vez, se trata de una función exponencial cuya base no es el número e, sino 3, y cuyo exponente es la función $g(x) = \cos x$. Para hallar su derivada, usamos la fórmula

$$\left(a^{g(x)}\right)' = g'(x) \cdot \ln a \cdot a^{g(x)}$$

Con $g(x) = \cos x$.

Para este ejercicio además debes recordar que $(\cos x)' = -\sin x$. Procedamos:

$$f'(x) = (3^{\cos x})' = (\cos x)' \cdot \ln 3 \cdot 3^{\cos x}$$

$$f'(x) = -\sin x \cdot \ln 3 \cdot 3^{\cos x}$$

Ejemplo 3

Halle la derivada de la función exponencial

$$f(x) = 2^{\frac{x}{x^2+1}}$$

Nuevamente se trata de una función exponencial con una base distinta de e, y cuyo exponente no es x, por lo cual debemos usar la fórmula

$$\left(a^{g(x)}\right)' = g'(x) \cdot \ln a \cdot a^{g(x)}$$

Con $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$, reemplacemos

$$\left(2^{\frac{x}{x^2+1}}\right)' = \left(\frac{x}{x^2+1}\right)' \cdot \ln 2 \cdot 2^{\frac{x}{x^2+1}}$$

Ahora, calculemos la derivada presente en el lado derecho, haciendo uso de la fórmula para la derivada de una división

$$\left(\frac{x}{x^2+1}\right)' = \frac{(x)'(x^2+1) - x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

Sustituyamos este resultado en la derivada original y el trabajo estará listo

$$\left(2^{\frac{x}{x^2+1}}\right)' = \left(\frac{x}{x^2+1}\right)' \cdot \ln 2 \cdot 2^{\frac{x}{x^2+1}}$$

Es decir, la expresión buscada es:

$$\left(2^{\frac{x}{x^2+1}}\right)' = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \cdot \ln 2 \cdot 2^{\frac{x}{x^2+1}}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

A continuación, se solicita resolver cuatro derivadas para que practiques. Recuerda hacer lo siguiente:

- Resuélvelas siguiendo los pasos utilizados en los ejemplos resueltos.
- Si es necesario, apóyate con los apuntes expuestos al inicio.
- Si surgen dudas, regístralas para luego consultar con el tutor.
- ¡Buen trabajo!

Derive cada una de las siguientes funciones exponenciales, identificando el caso y la fórmula correspondiente.

1. $f(x) = e^{x^4}$
2. $f(x) = 5^{\ln x}$
3. $f(x) = 6^{\cos(x)}$
4. $f(x) = e^{\frac{1}{\sin x}}$

Solucionario

1. $f'(x) = 4x^3 e^{x^4}$
2. $f'(x) = \frac{\ln 5}{x} \cdot 5^{\ln x}$
3. $f'(x) = -\ln 6 \cdot \sin x \cdot 6^{\cos x}$
4. $f'(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} \cdot e^{\frac{1}{\sin x}}$ o bien $f'(x) = -\cot x \cdot \csc x \cdot e^{\frac{1}{\sin x}}$

SÍNTESIS

Una función exponencial es de la forma

$$f(x) = a^x$$

Con $a > 0$ y $a \neq 1$, siendo x un número real cualquiera.

Para derivar una función exponencial, podemos encontrarnos alguno de los siguientes casos:
Si la función exponencial tiene como base al número irracional e y su exponente es x, entonces su derivada es ella misma, es decir

$$(e^x)' = e^x$$

Si la función exponencial es de base e y exponente es una función cualquiera, entonces su derivada es

$$\left(e^{g(x)}\right)' = g'(x) \cdot e^{g(x)}$$

Si la función exponencial es de base a y exponente x, entonces su derivada es

$$(a^x)' = \ln a \cdot a^x$$

Por último, el caso más general es cuando la base de la función exponencial es a y en su exponente se encuentra una función cualquiera, en este caso aplicamos la fórmula

$$\left(a^{g(x)}\right)' = g'(x) \cdot \ln a \cdot a^{g(x)}$$

Para profundizar en este tema, te dejamos la siguiente bibliografía.

BIBLIOGRAFÍA

- Swokowski, E; Cole, J. (2009). Álgebra y trigonometría con geometría analítica. Cengage Learning.
- Larson, R. Hostetler, R. Edwards, B. Cálculo con geometría analítica. McGraw Hill.
- Derivando. (18 de noviembre de 2015). ¿Qué es el número e? [Archivo de video]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=Z5czpA-fyMU.

¿Quieres recibir orientación para optimizar tu estudio en la universidad?

CONTAMOS CON PROFESIONALES EXPERTOS EN
EL APRENDIZAJE QUE TE PUEDEN ORIENTAR

SOLICITA NUESTRO APOYO

Sitio Web de CIMA

Ver más fichas

Solicita más información

TALCA
UNIVERSIDAD
CHILE

CIMA
UNIDAD DE
ACOMPAÑAMIENTO
ESTUDIANTIL