TALCA
UNIVERSIDAD
CHILE

Método de integración por partes

MATEMÁTICAS

Vicerrectoría de Pregrado
CIVE Dirección de Ciclo de Vida Estudiantil
CIMA Unidad de Acompañamiento Estudiantil
PACE Programa de Acceso a la Educación Superior
Ministerio de Educación

RUTA DE APRENDIZAJE

• Con este documento se espera reforzar uno de los principales métodos de integración: el método de integración por partes.

• Para comprender este tema, es requisito haber enfrentado un curso relacionado con las funciones (principal objeto de estudio del cálculo), así como saber de límites y derivadas.

Funciones → Límites → Derivadas → Integrales

ÍNDICE

Introducción

La mayoría de las operaciones matemáticas con las que trabajamos vienen en pares de inversas: suma y resta, multiplicación y división, exponenciación y extracción de raíces. En cada caso, la segunda operación deshace la primera y viceversa. Una utilidad de las operaciones inversas es que nos permiten resolver ecuaciones. Por ejemplo, la resolución de $x^3=8$, implica el uso de extraer raíces.

En períodos anteriores, ya has estudiado derivación. Si queremos resolver ecuaciones que incluyan derivadas, necesitaremos su inversa, denominada antiderivación o integración. (Purcell et al, 2007).

El método que se describe a continuación, permite resolver integrales (o antiderivadas), y de esta forma encontrar funciones primitivas. Este tipo de integrales también se conocen como integrales indefinidas y, al resolverlas, se obtiene una función.

Integración por partes

Cuando el método de integración por sustitución falle, en ocasiones **es posible usar una doble sustitución**, mejor conocida como ***integración por partes***. Este método se basa en la fórmula de la derivada de un producto de dos funciones.

Sean $u=u(x)$ y $v=v(x)$

$$D_x[u(x)v(x)] = u(x)v'(x) + v(x)u'(x)$$

O al despejar

$$u(x)v'(x) = D_x[u(x)v(x)] - v(x)u'(x)$$

Si integramos ambos miembros de la ecuación, se obtiene

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u(x)\,dx$$

Ya que $dv=v'(x)dx$ y $du=u'(x)dx$, por lo común, la ecuación anterior se escribe de manera simbólica como sigue

Integración por partes: integrales indefinidas

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Si bien en el resto de este documento nos dedicaremos a resolver **integrales indefinidas**, esta fórmula también es aplicable cuando debamos integrar en un intervalo dado. Para integrales definidas, la fórmula es

Integración por partes: integrales definidas

$$\int_a^b u\,dv = [uv]_a^b - \int_a^b v\,du$$

Estas fórmulas permiten transformar el problema de integrar $\boldsymbol{u\,dv}$ al de integrar $\boldsymbol{v\,du}$. El éxito depende de la ***elección apropiada de u y dv***, la cual viene con la práctica.
(Purcell et al, 2007)

La cuestión de elegir u y dv

Una regla de oro para escoger cuál de las dos funciones es u, y cual es dv, **es elegir u como cualquiera de las funciones que aparezca primero** en esta lista:

I: Inversa de una función trigonométrica:

$tan^{-1}(x)$, $sec^{-1}(x)$, etc.

L: Función Logarítmica:

$\ln(x)$, $\log_2(x)$, etc.

A: Función algebraica:

x^2, $3x^{50}$, etc.

T: Función trigonométrica:

$\tan(x)$, $\sin(x)$, etc.

E: Función exponencial:

e^x, 13^x, etc.

Luego se hace dv la otra función. Puedes recordar esta lista usando la nemotecnia **ILATE**[1]. La razón para esto es que **las funciones que se encuentran más abajo en la lista tienen *antiderivadas* más fáciles** que las de arriba de ellas.

1 Para algunos ejercicios también se recomienda utilizar la nemotecnia en el orden LIATE.

En general, uno trata de escoger u y dv de forma que du sea más simple que u, y dv sea fácil de integrar. Si en cambio $sin^2(x)$ fuese elegido como u, y x como dv, tendríamos la siguiente integral

$$\int x\ sin^2(x)\,dx = sin^2(x) \cdot \left[\frac{1}{2}x^2\right] - \int x^2 \cdot \sin(2x)\,dx$$

La cual, luego de aplicar recursivamente la fórmula de integración por partes, claramente resultaría en una recursión infinita que no nos llevaría a ninguna parte.
(Bond & Hughes. 2009)

LEE Y ANALIZA LOS SIGUIENTES PROBLEMAS

Veamos una serie de ejemplos resueltos para ver cómo se aplica este método. Intentaremos abordar integrales de distinta dificultad, lo que nos llevará en algún caso a desarrollos extensos. Ánimo, sigue las siguientes indicaciones y todo será más simple.

- Lee comprensivamente.
- Revisa el paso a paso.
- Destaca lo que te resulte importante.
- Destaca lo que te genere dudas y luego consulta al tutor.

Ejemplo 1

Calcule

$$\int \boldsymbol{xe^x\,dx}$$

En la integral se aprecian dos funciones, una es x, que es algebraica, y la otra es e^x, del tipo exponencial. Entonces según la nemotecnia ILATE, la sustitución es

$$u = x \qquad du = dx$$

$$v = e^x \qquad dv = e^x dx$$

Y al integrar por parte tenemos

$$\int \overbrace{x}^{u}\overbrace{e^x dx}^{dv} = \overbrace{x}^{u}\overbrace{e^x}^{v} - \int \overbrace{e^x}^{v}\overbrace{dx}^{du}$$

$$\int xe^x\, dx = xe^x - e^x + C$$

Comprobemos usando la derivada de un producto

$$[xe^x - e^x + C]' = [xe^x]' - [e^x]'$$
$$= e^x + xe^x - e^x$$
$$= xe^x$$

Recordando

Si f y g son funciones derivables, entonces

(f·g)' (x)=f(x) g' (x)+g(x)f'(x)

Ejemplo 2

Integral recursiva: en algunas ocasiones nos encontraremos con integrales que resultan ser recursivas, es decir, debemos aplicar más de una vez algún método de integración, veamos el siguiente ejemplo

$$\int e^x \sin x\, dx$$

Siguiendo la nemotecnia **ILATE**, considerando que la función trigonométrica aparece primero, tenemos

$$u = \sin x \qquad du = \cos x\ dx$$

$$v = e^x \qquad dv = e^x dx$$

Recordando

[sin x]'=cos x
[cos x]'=-sin x

Entonces, luego de conmutar en la integral

$$\int \overbrace{\sin x}^{u}\ \overbrace{e^x dx}^{dv} = \overbrace{\sin x}^{u}\ \overbrace{e^x}^{v} - \int \overbrace{e^x}^{v}\ \overbrace{\cos x\, dx}^{du} \qquad (\mathbf{1})$$

Si aplicamos ahora integración por partes a la integral del lado derecho, tenemos

$$u = \cos x \qquad du = -\sin x \ dx$$

$$v = e^x \qquad dv = e^x dx$$

$$\int \overbrace{\cos x}^{u} \overbrace{e^x \, dx}^{dv} = \overbrace{\cos x}^{u} \overbrace{e^x}^{v} - \int \overbrace{e^x}^{v} \overbrace{(-\sin x) \, dx}^{du}$$

$$= \cos x \, e^x + \int e^x \sin x \, dx \qquad (\mathbf{2})$$

Reemplacemos la ecuación **(2)** en la ecuación **(1)**

$$\int \sin x \, e^x dx = \sin x \, e^x - \int e^x \cos x \ dx$$

$$\int \sin x \, e^x \, dx = \sin x \, e^x - \left(\cos x \, e^x + \int e^x \sin x \, dx \right)$$

$$\int \sin x \, e^x \, dx = \sin x \, e^x - \cos x \, e^x - \int e^x \sin x \, dx$$

$$\int \sin x \, e^x \, dx + \int e^x \sin x \, dx = \sin x \, e^x - \cos x \, e^x$$

$$2 \int e^x \sin x \, dx = \sin x \, e^x - \cos x \, e^x$$

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2} + C$$

Como se vió, fue necesario integrar dos veces.

Comprobemos derivando

$$\left[\frac{e^{x}(\sin x-\cos x)}{2}+C\right]'=\frac{1}{2}[e^{x}(\sin x-\cos x)]'$$

$$=\frac{1}{2}[e^{x}(\sin x-\cos x)+e^{x}(\cos x+\sin x)]$$

$$=\frac{1}{2}[e^{x}\sin x-e^{x}\cos x+e^{x}\cos x+e^{x}\sin x]$$

$$=e^{x}\sin x$$

Ejemplo 3

Resuelva la integral

$$\int \ln x\ dx$$

En algunos casos parecieran no haber una función derivada en una integral, sin embargo es evidente que si v=x, entonces dv=dx, lo cual sugiere la siguiente sustitución

$$u=\ln x \qquad du=\frac{1}{x}\ dx$$

$$v=x \qquad dv=dx$$

Luego

$$\int \overbrace{\ln(x)}^{u}\cdot\overbrace{1\ dx}^{dv}=\overbrace{\ln x}^{u}\cdot\overbrace{x}^{v}-\int\overbrace{x}^{v}\overbrace{\frac{1}{x}dx}^{du}$$

$$\int \ln x\ dx=x\ln x-\int dx$$

$$\int \ln x\ dx=x\ln x-x+C$$

Comprobemos

$$[x\ln x - x + C]' = [x\ln x]' - [x]'$$

$$= \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1$$

$$= \ln x + 1 - 1$$

$$= \ln x$$

Ejemplo 4

Resolvamos una integral más general y quizás más desafiante que las anteriores (considera $ab\neq 0$)

$$\int \cos(bx)\, e^{ax}\, dx$$

Nuevamente por **ILATE**, la función que primero aparece en la lista es la trigonométrica, entonces la sustitución es

$$u = \cos(bx) \qquad du = -b\sin(bx)\ dx$$

$$v = \frac{1}{b}e^{ax} \qquad dv = e^{ax}dx$$

Para calcular du se ha usado la regla de la cadena

Regla de la cadena

Sean $y = f(u)$ y $u = g(x)$. Si g es derivable en x y f es derivable en $u=g(x)$, entonces la función compuesta $f\circ g$, definida por $(f\circ g)(x)=f(g(x))$, es derivable en x y

$$(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

Puedes recordar la regla de la cadena de esta manera: la derivada de la función compuesta es la derivada de la función exterior evaluada en la función interna, por la derivada de la función interna.

Reemplacemos

$$\int \overbrace{\cos(bx)}^{u}\,\overbrace{e^{ax}\,dx}^{dv} = \overbrace{\cos(bx)}^{u}\cdot\overbrace{\frac{1}{a}e^{ax}}^{v} - \int \frac{1}{a}e^{ax}\cdot\overbrace{(-b\sin(bx)\ dx)}^{du}$$

$$\int \cos(bx)\,e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\cos(bx) + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin(bx)\,dx \qquad (3)$$

De forma similar al ejemplo 2, es necesario aplicar nuevamente integración por partes a la integral del lado derecho. Tomando a la función trigonométrica como u, resulta

$$u = \sin(bx) \qquad du = b\cos(bx)\,dx$$

$$v = \frac{1}{a}e^{ax} \qquad dv = e^{ax}dx$$

$$\int \overbrace{\sin(bx)}^{u}\,\overbrace{e^{ax}dx}^{dv} = \overbrace{\sin(bx)}^{u}\cdot\overbrace{\frac{1}{a}e^{ax}}^{v} - \int \overbrace{\frac{1}{a}e^{ax}}^{v}\,\overbrace{b\cos(bx)\,dx}^{du}$$

$$\int \sin(bx)\,e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos(bx)dx \quad (\mathbf{4})$$

Ahora reemplacemos la ecuación **(4)** en la ecuación **(3)**, denominando como $I = \int \cos(bx)\, e^{ax}\, dx$ para simplificar la escritura

$$\int \cos(bx)\, e^{ax}\, dx = \frac{1}{a} e^{ax} \cos(bx) + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin(bx)\, dx$$

$$I = \frac{1}{a} e^{ax} \cos(bx) + \frac{b}{a} \left(\frac{1}{a} e^{ax} \sin(bx) - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos(bx) dx \right)$$

$$I = \frac{1}{a} e^{ax} \cos(bx) + \frac{b}{a} \left(\frac{1}{a} e^{ax} \sin(bx) - \frac{b}{a} I \right)$$

$$I = \frac{1}{a} e^{ax} \cos(bx) + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin(bx) - \frac{b^2}{a^2} I$$

$$I + \frac{b^2}{a^2} I = \frac{1}{a} e^{ax} \cos(bx) + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin(bx)$$

$$I \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right) = \frac{1}{a} e^{ax} \cos(bx) + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin(bx)$$

$$I \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2} \right) = \frac{1}{a} e^{ax} \cos(bx) + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin(bx)$$

$$I = \left(\frac{a^2}{a^2 + b^2} \right) \left(\frac{1}{a} e^{ax} \cos(bx) + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin(bx) \right)$$

$$I = \left(\frac{a^2 e^{ax}}{a^2 + b^2} \right) \left(\frac{1}{a} \cos(bx) + \frac{b}{a^2} \sin(bx) \right) + C$$

$$I = \left(\frac{a^2 e^{ax}}{a^2 + b^2} \right) \left(\frac{a \cos(bx) + b \sin(bx)}{a^2} \right) + C$$

$$\int e^{ax}\ \cos(bx)\, dx = \frac{e^{ax} (a \cos(bx) + b \sin(bx))}{a^2 + b^2} + C$$

Comprobemos usando regla de la cadena

$$\left[\frac{e^{ax}(a\cos(bx)+b\sin(bx))}{a^2+b^2}+C\right]' = \frac{1}{a^2+b^2}\left[e^{ax}(a\cos(bx)+b\sin(bx))\right]'$$

$$=\frac{1}{a^2+b^2}\left[ae^{ax}(a\cos(bx)+b\sin(bx))+e^{ax}(-ab\ \sin(bx)+b^2\cos\ (bx))\right]$$

$$=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left[a^2\cos(bx)+ab\sin(bx)-ab\ \sin(bx)+b^2\cos\ (bx)\right]$$

$$=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left[a^2\cos(bx)+b^2\cos\ (bx)\right]$$

$$=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left[\cos(bx)\,(a^2+b^2)\right]$$

$$=\cos(bx)\,e^{ax}$$

Como se dijo en un principio, este resultado es general y nos permite resolver rápidamente las integrales que resultan para distintos valores de a y b. Por ejemplo, para a=1 y b=1 se obtiene la integral

$$\int e^x\cos x$$

que nos apareció en el desarrollo del **ejemplo 2** . Al reemplazar los respectivos valores de a y b en la fórmula se obtiene

$$\int e^{ax}\ \cos(bx)\,dx = \frac{e^{ax}(a\cos(bx)+b\sin(bx))}{a^2+b^2}+C$$

$$\int e^x\cos x = \frac{e^x}{2}(\cos x+\sin x)+C$$

Desafíate utilizando este último resultado para resolver nuevamente la integral del **ejemplo 2** de una forma alternativa.

Ejemplo 5

Calcule la siguiente integral

$$\int \mathbf{arccos(2}\boldsymbol{x}\mathbf{)}\boldsymbol{dx}$$

Para esta integral utilizaremos un procedimiento similar al del ejemplo 3, es decir, usaremos $v=x$ con lo cual $dv=dx$. Además, en el proceso será necesario hallar el resultado de la siguiente integral

$$\int \frac{-2x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$$

Para ello aplicaremos nuestro ya conocido método de *integración por sustitución*

Comencemos. Sea $u = 1 - 4x^2$, entonces $du = -8x\,dx$ o mejor aún $\frac{du}{4} = -2x\,dx$.

$$\int \frac{-2x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du$$

$$= \frac{1}{4}\int u^{-\frac{1}{2}}\,du$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}u^{\frac{1}{2}} + C_1$$

$$= \frac{\sqrt{1-4x^2}}{2} + C_1$$

Recordando

Para calcular esta integral se utiliza

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$$

Ahora, tomemos la integral que se pide resolver y apliquemos integración por partes, considerando por **ILATE** la sustitución doble que se indica

$$\int \arccos(2x)\, dx$$

$$u = \arccos(2x) \qquad du = \frac{-2}{\sqrt{1-4x^2}}\, dx$$

$$v = x \qquad dv = dx$$

Para hallar du, se usó la fórmula de la derivada del $arccos\, g(x)$

Recordando

Caso general para la derivada de la función arcocoseno

$$[\arccos g(x)]' = -\frac{1}{\sqrt{1-g^2(x)}} \cdot g'(x)$$

Apliquemos

$$\int \overbrace{\arccos(2x)}^{u}\, \overbrace{dx}^{dv} = \overbrace{\arccos(2x)}^{u}\, \overbrace{x}^{v} - \int \overbrace{x}^{v} \overbrace{\left(\frac{-2}{\sqrt{1-4x^2}}\right) dx}^{du}$$

Es fácil ver que la integral derecha corresponde a la calculada previamente, por lo tanto, reemplazaremos su resultado

$$\int \overbrace{\arccos(2x)}^{u}\, \overbrace{dx}^{dv} = \overbrace{\arccos(2x)}^{u}\, \overbrace{x}^{v} - \left(\frac{\sqrt{1-4x^2}}{2} + C_1\right)$$

En conclusión

$$\int \arccos(2x)\ dx = x\arccos(2x) - \frac{\sqrt{1-4x^2}}{2} + C$$

Donde $C = -C_1$.

Comprobemos usando regla de la cadena y fórmula de la derivada del arcocoseno.

$$\left[x\arccos(2x) - \frac{\sqrt{1-4x^2}}{2} + C\right]' = [x\arccos(2x)]' - \left[\frac{\sqrt{1-4x^2}}{2}\right]'$$

$$= \arccos(2x) - x\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} - \frac{1}{2}\left[\sqrt{1-4x^2}\right]'$$

$$= \arccos(2x) - \frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}} - \frac{1}{4}\frac{-8x}{\sqrt{1-4x^2}}$$

$$= \arccos(2x) - \frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}} + \frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}}$$

$$= \arccos(2x)$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

A continuación, se presentan tres integrales para que puedas resolver y practicar. Recuerda hacer lo siguiente:

- Resuélvelas siguiendo los pasos utilizados en los ejemplos resueltos.
- Si es necesario, apóyate con los apuntes expuestos al inicio.
- Si surgen dudas, regístrarlas para luego consultarlas con el tutor.
- ¡Buen trabajo!

1) $\int x^2 \sin(3x) \; dx$
2) $\int x^4 \ln x \; dx$
3) $\int x \cos x \; dx$

Solucionario

1) $\frac{(2-9x^2)\cos(3x)+6\sin(3x)}{27} + C$
2) $\frac{1}{5}x^5\left(\ln x - \frac{1}{5}\right) + C$
3) $x\sin(x) + \cos(x) + C$

Es posible que tu respuesta, aun estando correcta, no se parezca a las del solucionario. Te desafío a usar todas tus habilidades algebraicas para llegar a las expresiones anteriores. Si no puedes llegar a éstas, deriva tu solución y comprueba si está correcta.

SÍNTESIS

En esta ficha vimos el **método de integración *por partes*,** el cual permite c**alcular antiderivadas haciendo uso de una doble sustitución.** Este método establece que podemos determinar una integral de la siguiente forma

Integración por partes: integrales indefinidas

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Es decir, **se pasa de integrar $u\,dv$ a integrar $v\,du$, con la finalidad de que esta última sea más simple.**
Para poder designar **quién es u existen diversas estrategias, sin embargo, aquí hemos considerado denotar como u a la función que aparezca primero** en la siguiente lista

I: Inversa de una función trigonométrica: $tan^{-1}(x)$, $sec^{-1}(x)$, etc.
L: Función Logarítmica: $\ln(x)$, $\log_2(x)$, etc.
A: Función algebraica: x^2, $3x^{50}$, etc.
T: Función trigonométrica: $\tan(x)$, $\sin(x)$, etc.
E: Función exponencial: e^x, 13^x, etc.

La cual da origen a la nemotecnia llamada **ILATE.**

BIBLIOGRAFÍA

• Purcell, E; Varberg, D; Rigdon, S. (2007). Cálculo diferencial e integral. Prentice Hall.

• Bond,T; Hughes, C. (2009). Mathematics: A-level Effective Guide for H1 and H2. Cosmic Services.

¿Quieres recibir orientación para optimizar tu estudio en la universidad?

CONTAMOS CON PROFESIONALES EXPERTOS EN
EL APRENDIZAJE QUE TE PUEDEN ORIENTAR

SOLICITA NUESTRO APOYO

Sitio Web de CIMA

Ver más fichas

Solicita más información

TALCA
UNIVERSIDAD
CHILE

CIMA
UNIDAD DE
ACOMPAÑAMIENTO
ESTUDIANTIL