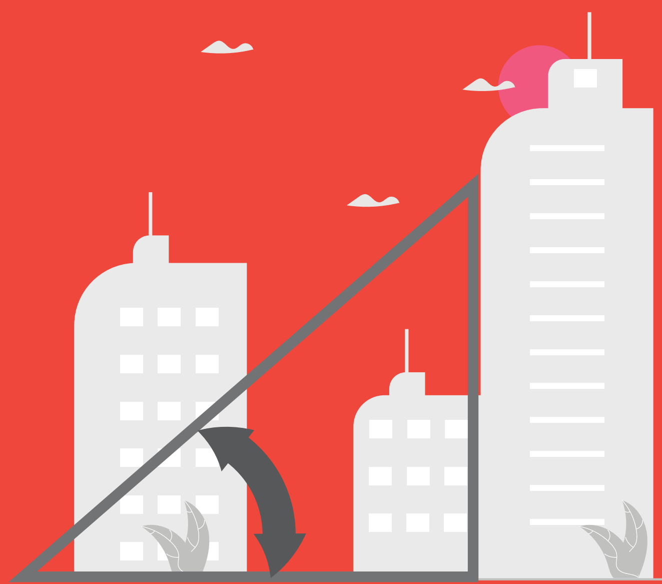
TALCA UNIVERSIDAD CHILE



Razones Trigonométricas

MATEMÁTICA

Vicerrectoría de Pregrado
CIVE Dirección de Ciclo de Vida Estudiantil
CIMA Unidad de Acompañamiento Estudiantil
PACE Programa de Acceso a la Educación Superior
Ministerio de Educación

RUTA DE APRENDIZAJE

• El aprendizaje esperado en este documento es reforzar las razones trigonométricas y aplicarlas en la resolución de problemas y ángulos especiales.
• Este tema está inserto en trigonometría estructurándose con el siguiente esquema:

Sistema de medidas de ángulos → Razones trigonométricas → Identidades trigonométricas → Ecuaciones trigonométrica → Función trigonométrica

ÍNDICE

Introducción

De acuerdo con Stewart et al (2007) si suponemos que se quiere hallar la distancia al Sol, usar una cinta métrica es por supuesto impráctico, por lo que necesitamos algo más que la medición simple para enfrentar este problema. Los ángulos son fáciles de medir o de estimar; por ejemplo, se puede hallar el ángulo formado entre el Sol, la Tierra y la Luna apuntando simplemente al Sol con un brazo y a la Luna con el otro y estimar el ángulo entre ellos. La idea clave es hallar una relación entre ángulos y distancias. Así que, si se tiene una manera de determinar distancias a partir de ángulos, se podría hallar la distancia al Sol sin ir allá.

Las funciones trigonométricas en la forma en que se originaron epistemológicamente fueron como razones entre los lados de un triángulo rectángulo, estas razones proporcionan las herramientas necesarias para calcular distancias, alturas o ángulos muy difícil de medir.

Razones trigonométricas de un ángulo agudo

Para definir las razones trigonométricas consideramos un triángulo rectángulo (ver figura1) con θ un ángulo agudo.

Ángulo agudo: ángulo menor que 90°

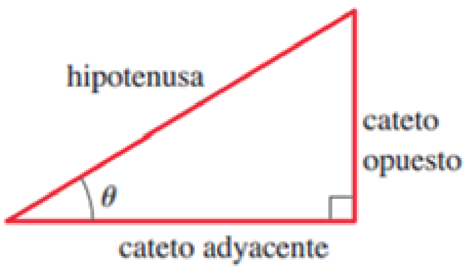


Figura 1

Figura 1: Triángulo rectángulo (Stewart et al.,2007)

Luego, las razones trigonométricas de las 6 funciones sen θ (seno de θ), cosθ (coseno de θ), tanθ (tangente de θ), cotθ (cotangente de θ), sec θ (secante de θ), cscθ (cosecante de θ) se definen a continuación:

Razones trigonométricas
$\operatorname{sen}\theta = \dfrac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$
$\cos\theta = \dfrac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$
$\tan\theta = \dfrac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$
$\cot\theta = \dfrac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto}$
$\sec\theta = \dfrac{hipotenusa}{cateto\ adyacente}$
$\csc\theta = \dfrac{hipotenusa}{cateto\ opuesto}$

Tabla 1: Definición de razones trigonométricas y relación entre razones recíprocas

Puedes observar en la Tabla 1 que los colores nos ayudan para visualizar que hay funciones donde las razones son las mismas pero invertidas. Por lo tanto, se cumple que:

$\csc\theta = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}$
$\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$
$\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$

Ten en cuenta

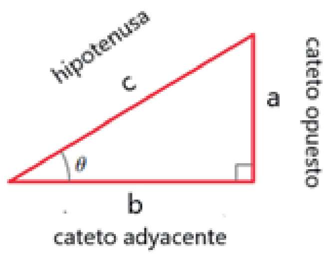
Puesto que dos triángulos rectángulos con ángulo θ son semejantes, estas relaciones son las mismas, sin importar el tamaño del triángulo; las razones trigonométricas sólo dependen del ángulo θ (Stewart et al., 2007).

Razones trigonométricas de ángulos especiales

Existen algunos ángulos que se usan con frecuencia y se pueden calcular fácilmente a partir del teorema de Pitágoras y utilizando las razones trigonométricas.

Recordando

Sea un triángulo rectángulo, se cumple que, el cateto opuesto al cuadrado más el cateto adyacente al cuadrado, es igual a la hipotenusa al cuadrado.



$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

Razones trigonométricas de 30° y 60°

Para poder obtener el valor de las razones trigonométricas de 30° y 60°, consideraremos un triángulo equilátero ABC de lado 2 y dibujamos una bisectriz perpendicular $\overline{CD}$ en ∢ ACD (ver figura 2), obteniendo dos ángulos iguales de 30° y quedando dividido en dos triángulos rectángulos con $\overline{AD} = \overline{DB} = 1$. Por lo tanto, dado que DB biseca al ángulo ABC, se obtiene un triángulo ADC con ángulo 30°, 60° y 90° (ver figura 3) o expresado en radianes $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{2}$.

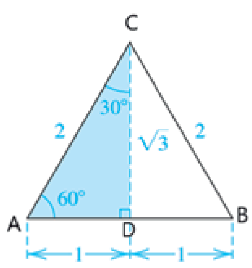


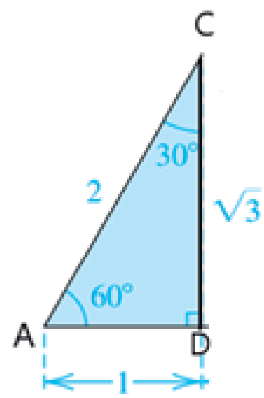
Figura 2

Figura 2: Demostración para razones trigonométricas de 30° y 60°. **Obtenido de: Swokowski y Cole (2009)**

Recordando

Un triángulo equilátero tiene sus ángulos y lados iguales, por lo tanto, cada ángulo mide 60° (180:3 = 60)

Utilizamos el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo ADC para obtener la longitud $\overline{CD}$ resultando √3.



$$\boxed{\begin{aligned} 1^2 + b^2 &= 2^2 \\ 1 + b^2 &= 4 \\ b^2 &= 4 - 1 \\ b^2 &= 3 \\ \sqrt{b^2} &= \sqrt{3} \\ b &= \sqrt{3} \end{aligned}}$$

Figura 3: Triángulo rectángulo con ángulo 30° y 60°

Por lo tanto, ahora que tenemos el valor de los catetos y la hipotenusa del triángulo ADC podemos determinar los valores de las 6 razones trigonométricas de 30° y 60° utilizando la tabla1, ten en cuenta el cateto opuesto y adyacente depende de donde está ubicado el ángulo, en el caso de 30° el cateto opuesto es 1 y el cateto adyacente es √3, por su parte el cateto opuesto de 60° es √3 y el cateto adyacente es 1. Luego se tiene lo siguiente:

$$\textbf{(a)}\quad \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \qquad \tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$\csc 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \sec 60^\circ = \frac{2}{1} = 2 \qquad \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\textbf{(b)}\quad \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2} \qquad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

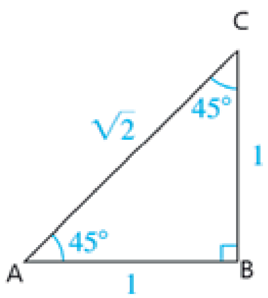
$$\csc 30^\circ = \frac{2}{1} = 2 \qquad \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \cot 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

Obtenido de: Swokowski y Cole (2009)

Razones trigonométricas de 45°

Para obtener las razones trigonométricas de 45°, consideraremos un triángulo rectángulo isósceles cuyos dos lados iguales tienen longitud 1, al ser isósceles tiene dos ángulos iguales de 45° (ver figura 4). Posteriormente utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener el valor de la hipotenusa, resultando $\sqrt{2}$.

En este caso, tanto el cateto opuesto como el cateto adyacente al ángulo de 45° su longitud es 1, por lo tanto, el seno como el coseno tienen el mismo valor, lo mismo sucede entre la secante y cosecante. Luego, utilizando las razones trigonométricas obtenemos:



$$1^2 + 1^2 = c^2$$
$$1 + 1 = c^2$$
$$2 = c^2$$
$$\sqrt{2} = \sqrt{c^2}$$
$$c = \sqrt{2}$$

Figura 4: Demostración para razones trigonométrica de 30° y 60°
Obtenido de: Swokowski y Cole (2009)

$$\operatorname{sen} 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45° \qquad \tan 45° = \frac{1}{1} = 1$$

$$\csc 45° = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} = \sec 45° \qquad \cot 45° = \frac{1}{1} = 1$$

Obtenido de: Swokowski y Cole (2009)

LEE Y ANALIZA LOS SIGUIENTES PROBLEMAS

A continuación, se presentan tres problemas resueltos con sus procedimientos, en estos problemas se sugiere hacer lo siguiente:

- Lee comprensivamente.
- Revisa el paso a paso.
- Destaca lo que te resulte importante.
- Destaca lo que te genere dudas y luego consulta al tutor.

EJEMPLO 1 (Stewart et al., 2007)

Hallar razones trigonométricas

Encuentre las seis razones trigonométricas del ángulo θ de la figura 5.

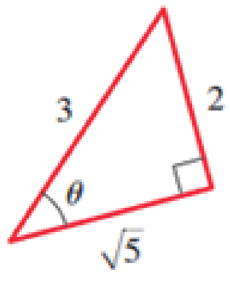


Figura 5: Triángulo rectángulo de ejemplo 1

Solución
1°) Reconocer cada lado del triángulo rectángulo:

- Cateto opuesto: 2 (ya que está opuesto al ángulo θ)
- Cateto adyacente: $\sqrt{5}$
- Hipotenusa: 3

2°) Calcular cada razón trigonométrica.

$$sen\ \theta = \frac{Cateto\ opuesto}{Hipotenusa} = \frac{2}{3} \qquad \csc\theta = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto} = \frac{3}{2}$$

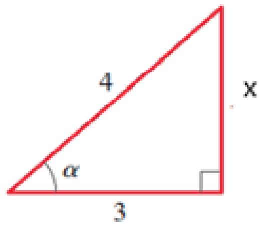
$$\cos\theta = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{\sqrt{5}}{3} \qquad \sec\theta = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{25}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$\tan\theta = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{25}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \qquad \cot\theta = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

EJEMPLO 2 (Stewart et al., 2007)

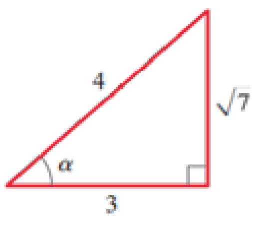
Si, cos α = $\frac{3}{4}$ bosqueje un triángulo rectángulo con ángulo agudo α y encuentre las otras cinco razones trigonométricas de α.

Solución
Puesto que cos α se define como la razón del cateto adyacente a la hipotenusa, y la hipotenusa , se bosqueja un triángulo con hipotenusa de longitud 4 y un cateto de longitud 3 adyacente a α.



Si el lado opuesto es x , entonces por el teorema de Pitágoras, se tiene:

$$3^2 + x^2 = 4^2$$
$$9 + x^2 = 16$$
$$x^2 = 16 - 9$$
$$x^2 = 7$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{7}$$
$$x = \sqrt{7}$$



Por lo tanto, utilizamos el triángulo rectángulo de la figura 7 para hallar las razones trigonométricas.
- Cateto opuesto: $\sqrt{7}$
- Cateto adyacente: 3
- Hipotenusa: 4

$$sen\ \theta = \frac{Cateto\ opuesto}{Hipotenusa} = \frac{\sqrt{7}}{4} \qquad \csc\theta = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto} = \frac{4}{\sqrt{7}} = \frac{4\cdot\sqrt{7}}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}} = \frac{4\sqrt{7}}{\sqrt{49}} = \frac{4\sqrt{7}}{7}$$

$$\cos\theta = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{3}{4} \qquad \sec\theta = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente} = \frac{4}{3}$$

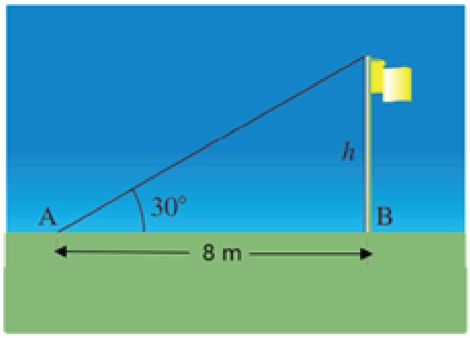
$$\tan\theta = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{\sqrt{7}}{3} \qquad \cot\theta = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto} = \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\cdot\sqrt{7}}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{49}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$$

EJEMPLO 3 (Swokowski y Cole 2009)

Problema de aplicación

Un topógrafo observa que en un punto A, situado al nivel del suelo a una distancia de 8 metros de la base B de una asta de bandera, el ángulo entre el suelo y el extremo superior de la asta es de 30°. ¿Cuántos metros mide la altura de la asta?

Solución
1°) **Bosquejar la situación**



2°) **Datos**
θ=30°   Cateto opuesto= h   Cateto adyacente= 8 m

3°) **Analizar qué razón necesitamos**

Al observar nuestro bosquejo vemos que lo que necesitamos es relacionar el lado opuesto que es h y la medida que nos entregan que es el lado adyacente, de este modo podemos obtener la altura. Esto sugiere que usemos una razón trigonométrica que contenga esos dos lados, es decir, tangente o cotangente. Por lo general es más fácil resolver el problema si seleccionamos la razón para la cual la incógnita está en el numerador, es decir, utilizaremos la razón trigonométrica de la tangente.

$$\tan\theta = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$$

$$\tan 30° = \frac{h}{8} \quad (1)$$

4°) **Resolver:**
Dado que tan 30°= $\frac{\sqrt{3}}{3}$, reemplazamos en (1) y despejamos h:

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{8}$$
$$h = \frac{8\sqrt{3}}{3} \approx 4.62$$

5°) **Responder a la pregunta del problema:**
La asta de la bandera mide aproximadamente 4.62 m

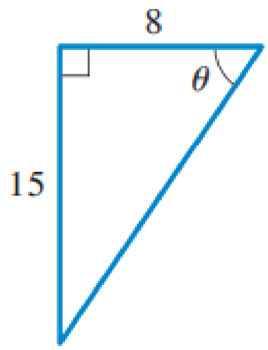
PON A PRUEBA TUS CONOCIMIENTOS

Ejercicios propuestos

A continuación, se presentan tres problemas propuestos para que puedas resolver y practicar, recuerda hacer lo siguiente:

- Resuélvelos siguiendo los pasos utilizados en los problemas resueltos.
- Si es necesario apóyate con los apuntes.
- Si surgen dudas, registrarlas para luego consultar con el tutor.
- ¡Buen trabajo!

1. Calcule los valores exactos de las seis razones trigonométricas del ángulo θ en el triángulo **(Stewart et al., 2007).**



2. Si sen$\theta = \frac{3}{5}$,bosqueje el triángulo que tiene ángulo agudo θ, y encuentre las otras cinco razones trigonométricas de θ **(Stewart et al., 2007).**

3. Un guardabosque, situado a 60 metros de la base de una secoya roja (árbol), observa que el ángulo entre el suelo y la cima del árbol es de 60°. Estime la altura del árbol **(Swokowski y Cole, 2009).**

Solucionario:

1. $\operatorname{sen}\theta = \frac{15}{17}$ $\qquad \cos\theta = \frac{8}{17}$ $\qquad \tan\theta = \frac{15}{8}$

   $\csc\theta = \frac{17}{15}$ $\qquad \sec\theta = \frac{17}{8}$ $\qquad \cot\theta = \frac{8}{15}$

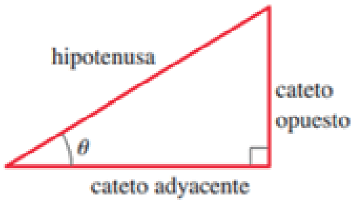
2. $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}$ $\qquad \cos\theta = \frac{4}{5}$ $\qquad \tan\theta = \frac{3}{4}$

   $\csc\theta = \frac{5}{3}$ $\qquad \sec\theta = \frac{5}{4}$ $\qquad \cot\theta = \frac{4}{3}$

3. La altura del árbol mide $60\sqrt{3}$ metros, aproximadamente 103.9 metros.

SÍNTESIS

En este documento se estudiaron las razones trigonométricas para ángulos agudos de un triángulo rectángulo:



Las cuales se relacionan de la siguiente forma:

Relaciones trigonométricas

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \cos\theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} \qquad \tan\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

$$\csc\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} \qquad \cot\theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$$

Tabla obtenida de Stewart et al., 2007

Con estas razones trigonométricas podemos obtener los valores de algunos ángulos utilizados frecuentemente como 30°, 45° y 60°, las cuales se resumen en la siguiente tabla:

θ en grados	θ en radianes	sen θ	cos θ	tan θ	csc θ	sec θ	cot θ
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Tabla obtenida de Stewart et al., 2007

Referencia bibliográfica

Swokowski, E.,Cole, J. (2009). Álgebra y trigonometría con geometría análitica. Cengage Learning. (12ª ed.)

Stewart, J.,Redlin, L.,Watson, S. (2007). Precálculo: Matemáticas para el cálculo. Cengage Learning. (5ª ed.)

¿Quieres recibir orientación para optimizar tu estudio en la universidad?

CONTAMOS CON PROFESIONALES EXPERTOS EN
EL APRENDIZAJE QUE TE PUEDEN ORIENTAR

SOLICITA NUESTRO APOYO

Sitio Web de CIMA

Ver más fichas

Solicita más información

TALCA UNIVERSIDAD CHILE

CIMA UNIDAD DE ACOMPAÑAMIENTO ESTUDIANTIL