



Identidades trigonométricas Adición, sustracción de ángulos y ángulo doble

MATEMÁTICA

RUTA DE APRENDIZAJE

- El aprendizaje esperado en este documento es reforzar algunas identidades trigonométricas de mayor complejidad.
- Este tema está inserto en trigonometría estructurándose con el siguiente

Razones
trigonométricas

Identidades
trigonométricas
básicas

Identidades de
adición y sustracción
de ángulos

Identidades del
doble de un
ángulo

Función
trigonométrica

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

CONTENIDO

- Identidades trigonométricas de adición de dos ángulos
- Identidades trigonométricas de sustracción de dos ángulos
- Identidad trigonométrica del doble de un ángulo

ACTIVIDADES RESUELTAS

RESOLUCIÓN

PRUEBA TUS CONOCIMIENTOS

RESPUESTAS

SÍNTESIS

BIBLIOGRAFÍA

INTRODUCCIÓN

Las **identidades trigonométricas** son igualdades que se cumplen para cualquier ángulo que aparece en la identidad (Baldor, 2004). Al aplicar las identidades que veremos en este documento podemos utilizar ángulos conocidos para calcular el valor exacto de una función trigonométrica, además de simplificar una expresión complicada que contenga funciones trigonométricas a una expresión mucho más simple, con lo que podemos entender mejor lo que significa la expresión (Stewart et al., 2007).

CONTENIDO

Identidades trigonométricas de la adición de ángulos

Para poder entender cómo se obtienen las identidades de adición de ángulos, consideramos el triángulo rectángulo AEF inscrito en el rectángulo ABCD, con $\angle FAE = \alpha$, $\angle EAB = \beta$ y $\overline{AF} = 1$ (ver Figura 1).

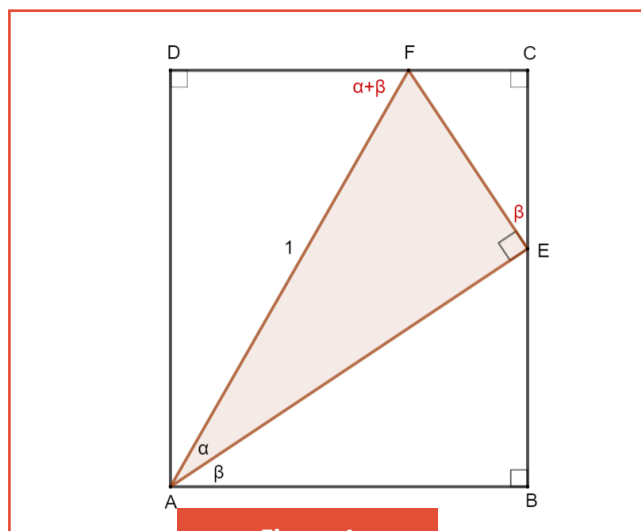


Figura 1

Dado que $\angle DFA$ y $\angle FAB$ son ángulos alternos internos, tienen la misma medida, es decir, $\angle DFA = \alpha + \beta$. Además, puesto que por propiedad de ángulos externos

$\angle CEA = \angle EAB + \angle ABE$, obtenemos $\angle FEC = \beta$.

Ahora, utilizando razones trigonométricas y dado que consideramos $\overline{AF} = 1$, obtenemos las medidas de $\overline{AE}$, $\overline{EF}$, $\overline{AB}$, $\overline{BE}$, $\overline{CE}$, $\overline{CF}$, $\overline{DF}$ y $\overline{AD}$, explicadas a continuación:

$\sin \alpha = \frac{\overline{EF}}{1}$ $\overline{EF} = \sin \alpha$	$\cos \alpha = \frac{\overline{AE}}{1}$ $\overline{AE} = \cos \alpha$
$\sin \beta = \frac{\overline{BE}}{\overline{AE}}$ $\overline{BE} = \sin \beta \cdot \overline{AE}$ $\overline{BE} = \sin \beta \cdot \cos \alpha$	$\cos \beta = \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}}$ $\overline{AB} = \cos \beta \cdot \overline{AE}$ $\overline{AB} = \cos \beta \cdot \cos \alpha$
$\sin (\alpha + \beta) = \frac{\overline{AD}}{1}$ $\overline{AD} = \sin (\alpha + \beta)$	$\cos (\alpha + \beta) = \frac{\overline{DF}}{1}$ $\overline{DF} = \cos (\alpha + \beta)$
$\sin \beta = \frac{\overline{CF}}{\overline{EF}}$ $\overline{CF} = \sin \beta \cdot \overline{EF}$ $\overline{CF} = \sin \beta \cdot \sin \alpha$	$\cos \beta = \frac{\overline{CE}}{\overline{EF}}$ $\overline{CE} = \cos \beta \cdot \overline{EF}$ $\overline{CE} = \cos \beta \cdot \sin \alpha$ $\overline{CE} = \sin \alpha \cdot \cos \beta$

Lo anterior se puede visualizar en la Figura 2, obteniéndose $\text{sen}(\alpha + \beta)$ y $\cos(\alpha + \beta)$.

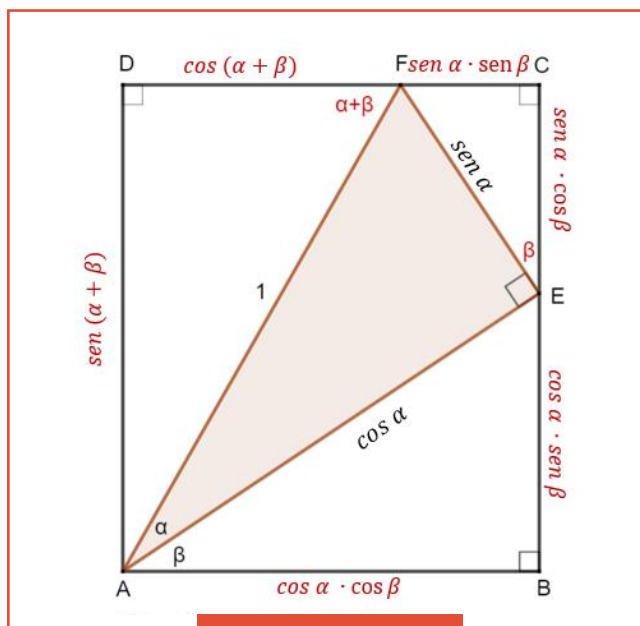


Figura 2

Luego, observando la Figura 2, la identidad de suma de ángulos del seno y coseno son:

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \text{sen } \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta$$

Ahora para obtener $\tan(\alpha + \beta)$, utilizaremos la identidad $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\text{sen}(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$, entonces:

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\text{sen}(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} \\ &= \frac{\text{sen } \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \text{sen } \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta} \end{aligned}$$

Dividiremos numerador y denominador por $\cos \alpha \cdot \cos \beta$:

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\frac{\text{sen } \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \text{sen } \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}} \\ &= \frac{\frac{\text{sen } \alpha \cdot \cancel{\cos \beta} + \cancel{\cos \alpha} \cdot \text{sen } \beta}{\cancel{\cos \alpha} \cdot \cancel{\cos \beta} - \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta}}{\frac{\cancel{\cos \alpha} \cdot \cancel{\cos \beta} - \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta}{\cancel{\cos \alpha} \cdot \cancel{\cos \beta}}} \\ &= \frac{\frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\text{sen } \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\text{sen } \beta}{\cos \beta}} \end{aligned}$$

Finalmente, por identidad de la tangente obtenemos:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

Identidades trigonométricas de sustracción de ángulos

Para obtener la sustracción de dos ángulos, utilizamos las siguientes identidades de ángulos negativos:

$$\text{sen}(-x) = -\text{sen } x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\tan(-x) = -\tan x$$

- **Sustracción de ángulos del seno**

(1) Utilizamos la identidad:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$$

(2) Sustituimos β por $(-\beta)$:

$$\operatorname{sen}(\alpha + (-\beta)) =$$

$$\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos(-\beta) + \cos \alpha \cdot \operatorname{sen}(-\beta)$$

(3) Utilizando las identidades trigonométricas de ángulos negativos, tenemos que:

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot -\operatorname{sen} \beta$$

(4) Finalmente, ordenamos los signos:

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$$

- **Sustracción de ángulos del coseno**

(1) De la misma forma que anteriormente, para obtener $\cos \alpha - \beta$ utilizamos la identidad:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$$

(2) Sustituimos β por $(-\beta)$:

$$\cos(\alpha + (-\beta)) =$$

$$\cos \alpha \cdot \cos(-\beta) - \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen}(-\beta)$$

(3) Utilizando las identidades trigonométricas de ángulos negativos, tenemos que:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \cdot -\operatorname{sen} \beta$$

(4) Finalmente,

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$$

- **Sustracción de ángulos de la tangente**

(1) Para obtener $\tan(\alpha - \beta)$, utilizamos la identidad:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

(2) Sustituimos β por $(-\beta)$:

$$\tan(\alpha + (-\beta)) = \frac{\tan \alpha + \tan(-\beta)}{1 - \tan \alpha \cdot \tan(-\beta)}$$

(3) Utilizando las identidades trigonométricas de ángulos negativos, tenemos que:

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha + -\tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot -\tan \beta}$$

(4) Finalmente,

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

Identidades trigonométricas del doble de un ángulo

Con las identidades anteriores de adición de ángulos, podemos obtener identidades de funciones trigonométricas del ángulo doble, que se detallarán a continuación:

(1) Para obtener $\text{sen } 2\alpha$, utilizamos la identidad $\text{sen}(\alpha + \beta)$, con $\beta = \alpha$

$$\text{sen}(\alpha + \alpha) = \text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha + \cos \alpha \cdot \text{sen } \alpha$$

$$\text{sen}(\alpha + \alpha) = \text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha + \text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\text{sen}(2\alpha) = 2 \text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha$$

(2) Para obtener $\cos 2\alpha$, utilizamos la identidad $\cos(\alpha + \beta)$, con $\beta = \alpha$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha \quad (*)$$

Dado que se conoce la identidad $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ entonces $\text{sen}^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$. Finalmente sustituyendo en (*) obtenemos:

$$\cos(2\alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

(3) Para obtener $\tan 2\alpha$, utilizamos la identidad $\tan(\alpha + \beta)$, con $\beta = \alpha$,

$$\tan(\alpha + \alpha) = \frac{\tan \alpha + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \alpha}$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

A continuación, se presentan tres problemas resueltos con sus procedimientos, en estos problemas se sugiere hacer lo siguiente:

- Lee comprensivamente.
- Revisa el paso a paso.
- Destaca lo que te resulte importante.
- Destaca lo que te genere dudas y luego consulta al tutor.

EJEMPLO 1: (Stewart et al., 2007)

Calcule el valor exacto de $\cos 75^\circ$

Solución:

- (1) Observe que $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$. Puesto que conocemos los valores exactos del seno y el coseno de 45° y 30° , aplicamos la siguiente identidad:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$$

- (2) Se sustituyen los valores de los ángulos $\alpha = 45^\circ$ y $\beta = 30^\circ$
 $\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \operatorname{sen} 45^\circ \cdot \operatorname{sen} 30^\circ$

- (3) Se sustituyen los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos ya conocidos, recordando que:

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2} \quad \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

- (4) El valor exacto de $\cos 75^\circ$ es:

$$\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

EJEMPLO 2: (Sullivan, 2006)

Encuentre el valor exacto de $\operatorname{sen} 80^\circ \cos 20^\circ - \cos 80^\circ \operatorname{sen} 20^\circ$.

Solución:

- (1) La expresión $\operatorname{sen} 80^\circ \cos 20^\circ - \cos 80^\circ \operatorname{sen} 20^\circ$ corresponde al segundo miembro de la identidad $\operatorname{sen}(\alpha - \beta)$ con $\alpha = 80^\circ$ y $\beta = 20^\circ$

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$$

Luego,

$$\operatorname{sen} 80^\circ \cos 20^\circ - \cos 80^\circ \operatorname{sen} 20^\circ = \operatorname{sen}(80^\circ - 20^\circ) = \operatorname{sen} 60^\circ$$

- (2) Recordamos que $\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, por tanto, tenemos que:

$$\operatorname{sen} 80^\circ \cos 20^\circ - \cos 80^\circ \operatorname{sen} 20^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

EJEMPLO 3: (Aguilar et al., 2007)

Determina $\tan 15^\circ$ y expresa 15° como una diferencia de ángulos notables:



Recordando

Los ángulos notables son: $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$

Solución:

- (1) Expresamos el ángulo de 15° como $60^\circ - 45^\circ$, entonces

$$\tan(15^\circ) = \tan(60^\circ - 45^\circ)$$

- (2) Se emplea la identidad

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

- (3) Se sustituyen los valores de los ángulos $\alpha = 60^\circ$ y $\beta = 45^\circ$

$$\tan(15^\circ) = \tan(60^\circ - 45^\circ) = \frac{\tan 60^\circ - \tan 45^\circ}{1 + \tan 60^\circ \cdot \tan 45^\circ}$$

- (4) Se sustituyen los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos notables, recordando que $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ y $\tan 45^\circ = 1$

$$\tan(15^\circ) = \tan(60^\circ - 45^\circ) = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3} \cdot 1} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}}$$

- (5) Racionalizamos y reducimos las expresiones algebraicas

$$\begin{aligned}\tan(15^\circ) &= \tan(60^\circ - 45^\circ) = \frac{(\sqrt{3} - 1) \cdot (1 - \sqrt{3})}{(1 + \sqrt{3}) \cdot (1 - \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3} - 3 - 1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3} + \sqrt{3} - 3} \\ \tan(15^\circ) &= \tan(60^\circ - 45^\circ) = \frac{\sqrt{3} - 3 - 1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3} + \sqrt{3} - 3} = \frac{2\sqrt{3} - 4}{-2} = \frac{-2(-\sqrt{3} + 2)}{-2}\end{aligned}$$

- (6) Finalmente,

$$\tan(15^\circ) = 2 - \sqrt{3}$$

EJEMPLO 4: (Stewart et al., 2007)

Demuestre la identidad $\frac{\sin 3x}{\sin x \cdot \cos x} = 4 \cos x - \sec x$

Solución:

- (1) Empezamos con el primer miembro y expresamos $3x$ como una adición.

$$\frac{\sin 3x}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{\sin (x + 2x)}{\sin x \cdot \cos x}$$

- (2) Utilizamos la identidad $\sin(\alpha + \beta)$, con $\alpha = x$; $\beta = 2x$

$$\frac{\sin 3x}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{\sin (x + 2x)}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{\sin x \cdot \cos 2x + \cos x \cdot \sin 2x}{\sin x \cdot \cos x}$$

- (3) Ahora utilizamos las identidades de ángulo doble para $\cos 2x$ y $\sin 2x$

$$\frac{\sin 3x}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{\sin x \cdot (2 \cos^2 x - 1) + \cos x \cdot 2 \sin x \cdot \cos x}{\sin x \cdot \cos x}$$

- (4) Separamos las fracciones

$$\frac{\sin 3x}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{\sin x \cdot (2 \cos^2 x - 1)}{\sin x \cdot \cos x} + \frac{\cos x \cdot 2 \sin x \cdot \cos x}{\sin x \cdot \cos x}$$

- (5) Simplificamos,

$$\frac{\sin 3x}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{\cancel{\sin x} \cdot (2 \cos^2 x - 1)}{\cancel{\sin x} \cdot \cos x} + \frac{\cos x \cdot 2 \cancel{\sin x} \cdot \cos x}{\cancel{\sin x} \cdot \cancel{\cos x}}$$

$$\frac{\sin 3x}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{(2 \cos^2 x - 1)}{\cos x} + 2 \cos x$$

(6) Separamos las fracciones

$$\frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x} = \frac{2 \cos^2 x}{\cos x} - \frac{1}{\cos x} + 2 \cos x$$

(7) Simplificamos,

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x} &= \frac{2 \cancel{\cos x} \cdot \cos x}{\cancel{\cos x}} - \frac{1}{\cos x} + 2 \cos x \\ \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x} &= 2 \cos x - \frac{1}{\cos x} + 2 \cos x \end{aligned}$$

PRUEBA TUS CONOCIMIENTOS

A continuación, se presentan ejercicios propuestos para que puedas resolver y practicar, recuerda hacer lo siguiente:

- Resuélvelos siguiendo los pasos utilizados en los problemas resueltos.
- Si es necesario apóyate con los apuntes.
- Si surgen dudas, registrarlas para luego consultar con el tutor.
- ¡Buen trabajo!

1. Encuentre el valor exacto de $\operatorname{sen} 18^\circ \cos 27^\circ + \cos 18^\circ \operatorname{sen} 27^\circ$
(Stewart et al., 2007)
2. Demuestre la identidad $\operatorname{sen}(x + y) - \operatorname{sen}(x - y) = 2 \cos x \cdot \operatorname{sen} y$
(Stewart et al., 2007)
3. Aplique la identidad de la adición o de la sustracción de ángulos de funciones trigonométricas para calcular el valor exacto de la expresión $\cos 105^\circ$
(Stewart et al., 2007)

Solucionario:

1. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
2. **Sugerencia:** comience por el lado izquierdo.
3. $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

SÍNTESIS

En este documento se estudió las identidades de adición y sustracción de ángulos de funciones trigonométricas, que se resumen a continuación:

Adición	Sustracción
$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \text{sen } \beta$	$\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen } \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \text{sen } \beta$
$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta$	$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta$
$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$	$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}$

A partir de las identidades anteriores de adición de ángulos, se deducen las identidades de ángulo doble:

Ángulo doble
$\text{sen}(2\alpha) = 2 \text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha$
$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha \text{ ó } \cos(2\alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1$
$\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$



BIBLIOGRAFÍA

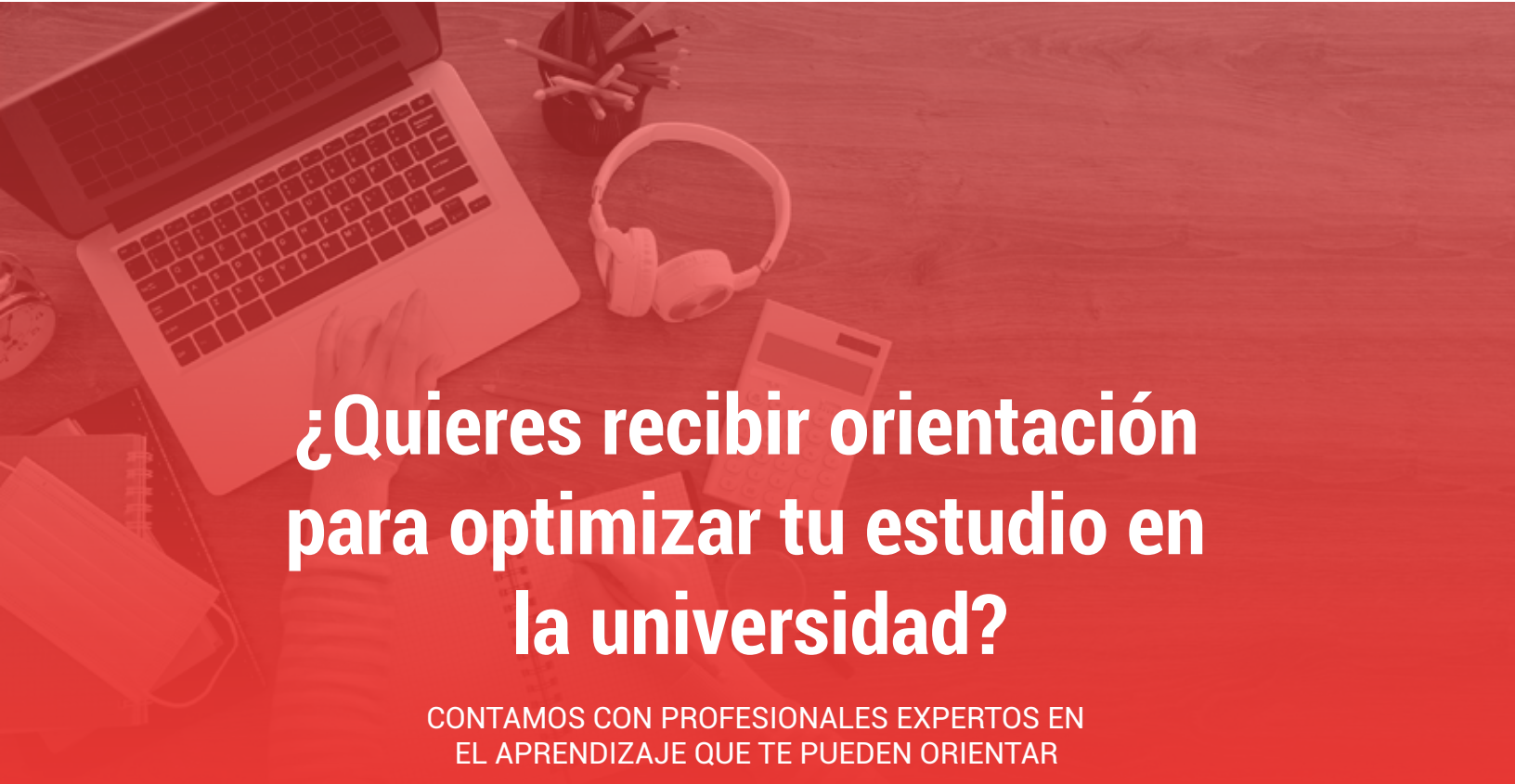
Aguilar, A., Bravo, F., Gallegos, H., Cerón, M., Reyes, R. (2009). Geometría y trigonometría. México: Pearson Educación. (1ª ed.)

Baldor, J. (2004). *Geometría plana y del espacio con una introducción a la trigonometría*. México: Publicaciones Cultural.

Stewart, J., Redlin, L., Watson, S. (2007). *Precálculo: Matemáticas para el cálculo*. Cengage Learning. (5ª ed.)

Sullivan, M. (2006). *Álgebra y trigonometría*. México: Pearson Educación. (7ª ed.)





¿Quieres recibir orientación para optimizar tu estudio en la universidad?

CONTAMOS CON PROFESIONALES EXPERTOS EN
EL APRENDIZAJE QUE TE PUEDEN ORIENTAR

SOLICITA NUESTRO APOYO



Sitio Web de CIMA



Ver más fichas



Solicita más información