TALCA UNIVERSIDAD CHILE

Integración Sustitución Trigonométrica

MATEMÁTICA

Vicerrectoría de Pregrado
CIVE Dirección de Ciclo de Vida Estudiantil
CIMA Unidad de Acompañamiento Estudiantil
PACE Programa de Acceso a la Educación Superior
Ministerio de Educación

RUTA DE APRENDIZAJE

- El aprendizaje esperado en este documento es utilizar integración de sustitución trigonométrica.
- Este tema está inserto en Cálculo, estructurándose con el siguiente esquema:

Trigonometría → Integral → Método de sustitución → Método de sustitución trigonometría

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Para la determinación del área de un círculo o una elipse, surge una integral de la forma $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx$, donde $a > 0$. Si fuese $\int x\sqrt{a^2 - x^2}dx$, utilizando la sustitución $u = a^2 - x^2$ sería eficaz, pero, tal como ésta, $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx$, resulta más complicado (Stewart, 2018). Por lo tanto, en este documento, indagaremos integrales que contienen expresiones de la forma $\sqrt{(a^2 - x^2)}$, $\sqrt{(a^2 + x^2)}$ y $\sqrt{(x^2 - a^2)}$, con $a > 0$, donde el método de sustitución trigonométrica resultará muy útil al resolver este tipo de integrales.

SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICAS

Cuando un integrando contiene potencias enteras de x y potencias enteras de:

$$\sqrt{a^2 - x^2}, \quad \sqrt{a^2 + x^2} \quad o \quad \sqrt{x^2 - a^2}\ , a > 0$$

Podemos evaluar la integral por medio de sustituciones trigonométricas. Los tres casos que consideramos en este documento dependen, a su vez, de las identidades pitagóricas fundamentales. En la **tabla 1** puedes observar las sustituciones trigonométricas especificadas, junto a sus identidades. En cada caso, la restricción sobre θ se asigna para asegurar que la función que define la sustitución es inyectiva (Stewart, 2018).

Expresión	Sustitución	Identidad
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$\boldsymbol{x = a\,\mathrm{sen}\,\theta}$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$	$1 - \mathrm{sen}^2\,\theta = cos^2\,\theta$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$\boldsymbol{x = a\tan\theta}$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$	$1 + tan^2\,\theta = sec^2\,\theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$\boldsymbol{x = a\sec\theta}$, $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ o $\pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$	$\sec^2\theta - 1 = tan^2\,\theta$

Tabla 1: Sustituciones trigonométricas

En cada caso, la restricción sobre la variable θ es precisamente a la que acompaña a la función trigonométrica inversa correspondiente.

Cuando revises los ejemplos observarás que, con ayuda de las identidades anteriores, que especificamos en la tabla 1, cada una de estas sustituciones produce un **cuadrado perfecto**. Con la restricción sobre θ para las sustituciones:

$x = a\sin\theta$ y $x = a\tan\theta$, la raíz cuadrada puede tomarse sin recurrir a valores absolutos. En el caso de $x = a\sec\theta$, debes tener más cuidado al usar esta sustitución (Zill y Warren, 2011).

- Si $x = a\,\mathrm{sen}\,\theta$, donde $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, entonces

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 - x^2} &= \sqrt{a^2 - (\boldsymbol{a\,\mathrm{sen}\,\theta})^2}\\ &= \sqrt{a^2 - a^2\mathrm{sen}^2\,\theta}\\ &= \sqrt{a^2(\boldsymbol{1 - \mathrm{sen}^2\,\theta})}\\ &= \sqrt{a^2 \cdot \boldsymbol{\cos^2\theta}}\\ &= a\cos\theta\end{aligned}$$

- Si $x = a\tan\theta$, donde $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, entonces

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 + x^2} &= \sqrt{a^2 + (\boldsymbol{a\tan\theta})^2}\\ &= \sqrt{a^2 + a^2\tan^2\theta}\\ &= \sqrt{a^2(\boldsymbol{1 + \tan^2\theta})}\\ &= \sqrt{a^2 \cdot \boldsymbol{\sec^2\theta}}\\ &= a\sec\theta\end{aligned}$$

- Si $x = a \sec\theta$, donde $\begin{cases} 0 \le \theta < \frac{\pi}{2} \\ \pi \le \theta < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$, entonces

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{(\boldsymbol{a \sec\theta})^{2} - a^2}$$

$$= \sqrt{a^2 \sec^2\theta - a^2}$$

$$= \sqrt{a^2(\boldsymbol{\sec^2\theta - 1})}$$

$$= \sqrt{a^2 \cdot \boldsymbol{\tan^2\theta}}$$

$$= a|\tan\theta|$$

Después de resolver la integración en θ es necesario volver a la variable original x. Si se construye un triángulo rectángulo de referencia, uno donde

$\sin\theta = \frac{x}{a}$, $\tan\theta = \frac{x}{a}$, $\sec\theta = \frac{x}{a}$ (ver figura 1), entonces las otras funciones trigonométricas pueden expresarse fácilmente en términos de x.

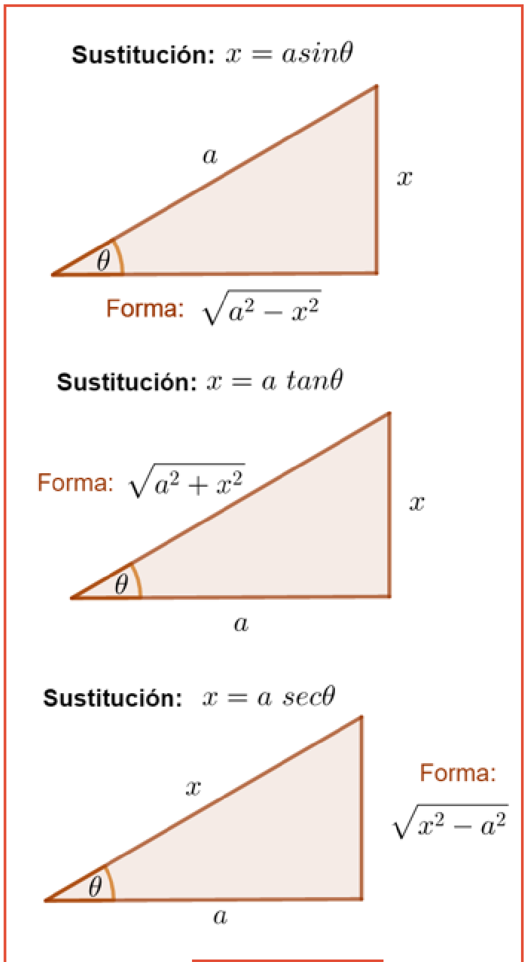


Figura 1

Figura 1: Triángulos rectángulos de referencia usados para expresar funciones trigonométricas en términos de una expresión algebraicas de x y a.

EJERCICIOS RESUELTOS

A continuación, se presentan ejercicios resueltos con sus procedimientos. En estos se sugiere hacer lo siguiente:

- Lee comprensivamente.
- Revisa el paso a paso.
- Destaca lo que te resulte importante.
- Destaca lo que te genere dudas y luego consulta al tutor.

EJEMPLO 1:

Evalúe $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx$, (Zill y Warren, 2011).

Solución: Al identificar $a = 3$ se llega a la sustitución $x = 3\,\text{sen}\,\theta$ y derivando obtenemos $dx = 3\cos\theta\, d\theta$, donde $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Luego, sustituyendo obtenemos:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx &= \int \frac{(\mathbf{3\,sen\,\theta})^2}{\sqrt{9-(\mathbf{3\,sen\,\theta})^2}}\ \mathbf{3\cos\theta\, d\theta} \\
&= \int \frac{9\,\text{sen}^2\theta}{\sqrt{9-9\,\text{sen}^2\theta}}\ 3\cos\theta\, d\theta \\
&= \int \frac{9\,\text{sen}^2\theta}{\sqrt{9(1-\text{sen}^2\theta)}}\ 3\cos\theta\, d\theta \\
&= \int \frac{9\,\text{sen}^2\theta}{\sqrt{9\,\boldsymbol{cos^2\theta}}}\ 3\cos\theta\, d\theta \\
&= \int \frac{9\,\text{sen}^2\theta}{3\cancel{\cos\theta}}\ 3\cancel{\cos\theta}\, d\theta \\
&= 9\int \text{sen}^2\theta\, d\theta \quad (1)
\end{aligned}$$

Utilizamos la identidad

$1 - \text{sen}^2\theta = cos^2\theta$

Simplificamos

Para evaluar la última integral trigonométrica **recuerda** la identidad de la mitad del ángulo:

$$\text{sen}\,\frac{\alpha}{2} = \mp\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

En nuestro caso, $\frac{\alpha}{2} = \theta$, entonces, $\alpha = 2\theta$

$$\text{sen}\,\theta = \mp\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}}$$

$$\mathbf{sen^2\,\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}}$$

Luego, reemplazamos en (1)

$$= 9 \int \frac{\mathbf{1 - \cos 2\theta}}{\mathbf{2}} \; d\theta$$

$$= \frac{9}{2} \int 1 - \cos 2\theta \; d\theta$$

$$= \frac{9}{2} \int 1 d\theta - \frac{9}{2} \int \cos u \cdot \frac{du}{2}$$

$$= \frac{9}{2}\,\theta - \frac{9}{2} \cdot \frac{\operatorname{sen} u}{2} + C$$

$$= \frac{9}{2}\,\theta - \frac{9}{4} \cdot \operatorname{sen} 2\theta + C$$

$$= \frac{9}{2}\,\theta - \frac{9}{4} \cdot 2 \operatorname{sen} \theta \cdot \cos \theta + C$$

$$\boldsymbol{= \frac{9}{2}\,\theta - \frac{9}{2} \operatorname{sen} \theta \cdot \cos \theta + C}$$

Utilizamos sustitución

$$u = 2\theta$$

$$du = 2d\theta$$

$$d\theta = \frac{du}{2}$$

Recuerda la identidad

$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cdot \cos \theta$

Ahora, necesitamos expresar este resultado en términos de la variable x, usamos nuestra sustitución inicial $x = 3 \operatorname{sen} \theta$, por lo tanto, obtenemos $\operatorname{sen} \theta = \frac{x}{3}$ y $\theta = arcsen\left(\frac{x}{3}\right)$. Luego, por el triángulo rectángulo de referencia en la figura 2 y utilizando razones trigonométricas vemos que $\cos \theta = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$ de modo que:

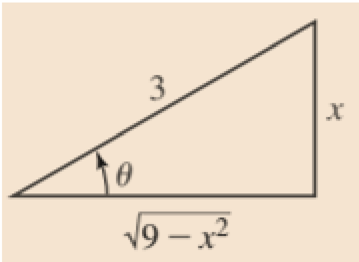


Figura 2: Triángulo rectángulo para ejemplo 1.

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx = \frac{9}{2} \cdot \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{9}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdot \frac{\sqrt{9-x^2}}{3} + C$$

Simplificamos,

$$\boxed{\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx \;= \frac{9}{2} arcsen\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{1}{2} x \sqrt{9-x^2} + C}$$

EJEMPLO 2:

Evalúe $\int \frac{1}{(4+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$, (Zill y Warren, 2011).

Solución:

Observe que el integrando es una potencia entera de $\sqrt{4+x^2}$, puesto que $(4+x^2)^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{4+x^2}\right)^3$, luego, $a = 2$, ya que, $\left(\sqrt{\mathbf{2}^2+x^2}\right)^3$, utilizando la sustitución $x = 2\tan\theta$ y su derivada $dx = 2\sec^2\theta\, d\theta$, se tiene $\sqrt{4+x^2} = \sqrt{4\, sec^2\theta} = 2\sec\theta$ (se utilizó la fórmula que obtuvimos en la página 3), por lo tanto,

$$\int \frac{1}{\left(\sqrt{4+x^2}\right)^3} dx = \int \frac{1}{(2\sec\theta)^3} \cdot \mathbf{2\sec^2\theta\, d\theta}$$

Simplificamos

$$= \int \frac{1}{4\sec\theta} d\theta$$
$$= \frac{1}{4}\int \cos\theta\, d\theta$$
$$= \frac{1}{4}\operatorname{sen}\theta + C$$

Recuerda

$$\frac{1}{\sec\theta} = \cos\theta$$

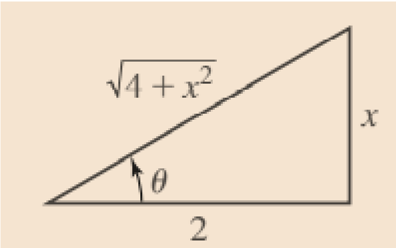


Figura 3: Triángulo rectángulo para ejemplo 2.

Ahora necesitamos expresar este resultado en términos de la variable x, por lo que a partir del triángulo de la figura 3, utilizamos razones trigonométricas para hallar $\operatorname{sen}\theta$, es decir, $\boldsymbol{\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}}$. Luego,

$$\boxed{\int \frac{1}{\left(\sqrt{4+x^2}\right)^3} dx = \frac{1}{4}\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{\sqrt{4+x^2}}} + C}$$

EJEMPLO 3:

Evalúe $\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x^4}dx$ suponiendo $x > 4$, (Zill y Warren, 2011).

Solución:

Puesto que $\sqrt{x^2-16}$ se puede escribir como $\sqrt{x^2-4^2}$, $a = 4$ utilizando la sustitución $x = 4\sec\theta$ y derivando obtenemos $dx = 4\sec\theta\tan\theta\, d\theta$, donde $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Luego, sustituyendo obtenemos:

$$\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x^4}dx = \int \frac{\sqrt{(4\sec\theta)^2-16}}{(4\sec\theta)^4}\cdot 4\sec\theta\tan\theta\, d\theta$$

$$= \int \frac{\sqrt{16\sec^2\theta-16}}{(4\sec\theta)^4}\cdot 4\sec\theta\tan\theta\, d\theta$$

$$= \int \frac{\sqrt{16\,(\sec^2\theta-1)}}{256\sec^4\theta}\cdot 4\sec\theta\tan\theta\, d\theta$$

$$= \int \frac{\sqrt{16\, tan^2\theta}}{256\sec^4\theta}\cdot 4\sec\theta\tan\theta\, d\theta$$

$$= \int \frac{4\,\tan\theta}{256\sec^4\theta}\cdot 4\sec\theta\tan\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{16}\int \frac{\tan^2\theta}{\sec^3\theta}d\theta$$

$$= \frac{1}{16}\int \frac{sen^2\,\theta}{cos^{\,2}\,\theta}\cdot \cos^3\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{16}\int sen^2\,\theta\cdot\ \cos\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{16}\int u^2\cdot\ \cos\theta\frac{du}{\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{16}\cdot\frac{u^3}{3}+C$$

$$= \frac{1}{16}\cdot\frac{\operatorname{sen}^3\theta}{3}+C$$

$$= \frac{1}{48}\cdot\operatorname{sen}^3\theta + C$$

Recuerda

$\frac{1}{\sec\theta} = \cos\theta$ y $\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$

→ Simplificamos

Utilizamos sustitución

$u = \operatorname{sen}\theta$

$du = \cos\theta\, d\theta$

$d\theta = \frac{du}{\cos\theta}$

Ahora necesitamos expresar este resultado en términos de la variable x, por lo que, a partir del triángulo rectángulo de la figura 4, utilizamos razones trigonométricas para hallar sen θ, es decir, $\mathbf{sen}\,\boldsymbol{\theta} = \frac{\sqrt{x^2-16}}{x}$, luego elevando a 3 tenemos $\mathbf{sen}^3\,\boldsymbol{\theta} = \frac{\left(\sqrt{x^2-16}\right)^3}{x^3}$, finalmente reemplazamos:

$$\boxed{\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x^4}dx = \frac{1}{48}\cdot\frac{\left(\sqrt{x^2-16}\right)^3}{x^3}+C}$$

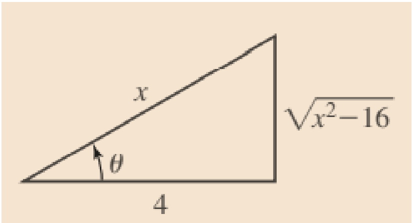


Figura 4: Triángulo rectángulo para ejemplo 3.

PRUEBA TUS CONOCIMIENTOS

A continuación, se presentan ejercicios propuestos para que puedas resolver y practicar. Recuerda hacer lo siguiente:

- Resuélvelos siguiendo los pasos utilizados en los problemas resueltos.
- Si es necesario, apóyate con los apuntes.
- Si surgen dudas, regístralas para luego consultar con el tutor o tutora.
- ¡Buen trabajo!

Calcular las siguientes integrales (Zill y Warren, 2011)

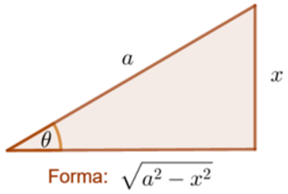
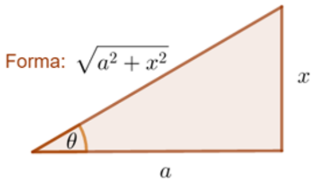
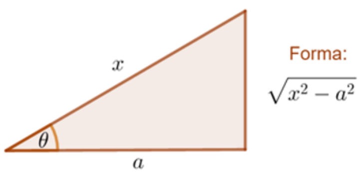
1. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\, dx$
2. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-36}} dx$
3. $\int x\sqrt{x^2+9}dx$

RESPUESTAS

1. $-arc\operatorname{sen} x - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C$
2. $\ln\left|\sqrt{x^2-36} + x\right| + C$
3. $\frac{(x^2+9)^{\frac{3}{2}}}{3} + C$

SÍNTESIS

En este documento se estudió el cálculo de integrales las cuales se deben utilizar sustituciones trigonométricas, que se resumen a continuación:

Expresión	Sustitución	Identidad	Equivalentes	Dibujo
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$\boldsymbol{x = a\,\mathbf{sen}\,\theta}$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$	$1 - \operatorname{sen}^2\theta = cos^2\theta$	$\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos\theta$	
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$\boldsymbol{x = a\,\mathbf{tan}\,\theta}$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$	$1 + tan^2\theta = sec^2\theta$	$\sqrt{a^2 + x^2} = a\sec\theta$	
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$\boldsymbol{x = a\,\mathbf{sec}\,\theta}$, $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ o $\pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$	$\sec^2\theta - 1 = tan^2\theta$	$\sqrt{x^2 - a^2} = a\lvert\tan\theta\rvert$	

REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA

Stewart, J. (2018). *Cálculo transcendentes tempranas.* Cengage. (8ª ed.)

Zill, D., Wright, W. (2011). *Cálculo transcendentes tempranas.* Mc Graw Hill. (4ª ed.)

¿Quieres recibir orientación para optimizar tu estudio en la universidad?

CONTAMOS CON PROFESIONALES EXPERTOS EN
EL APRENDIZAJE QUE TE PUEDEN ORIENTAR

SOLICITA NUESTRO APOYO

Sitio Web de CIMA

Ver más fichas

Solicita más información

TALCA
UNIVERSIDAD
CHILE

CIMA
UNIDAD DE ACOMPAÑAMIENTO ESTUDIANTIL