TALCA UNIVERSIDAD CHILE

Números Complejos

MATEMÁTICAS

Vicerrectoría de Pregrado

CIVE Dirección de Ciclo de Vida Estudiantil

CIMA Unidad de Acompañamiento Estudiantil

PACE Programa de Acceso a la Educación Superior

Ministerio de Educación

RUTA DE APRENDIZAJE

- Este documento tiene por objetivo que comprendas los números complejos, para ello es necesario que primero entiendas los números reales e imaginarios que son los que los componen.

Números Reales → Números Imaginarios → Números Complejos

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Los números imaginarios surgen de la necesidad de resolver ecuaciones cuadráticas como $x^2 + 1 = 0$, de ahí se definió la unidad imaginaria $i = \sqrt{-1}$.

Luego, al combinar un número real con un imaginario, surgen los números complejos.

En esta ficha repasaremos su definición, representación gráfica y operaciones.

DEFINICIÓN NÚMEROS COMPLEJOS

El conjunto de los números complejos se simboliza por $\mathbb{C}$ y son una expresión del tipo $z = a + bi$, donde a (se llama la parte real "$Re(z)$") y b (parte imaginaria "$Im(z)$") son números reales e i es la unidad imaginaria (Rivero Mendoza, 2001).

Los números complejos se pueden representar de forma canónica, geométrica y polar, revisaremos las dos primeras que son las más utilizadas.

FORMA CANÓNICA

El complejo $z = (a, b)$ se puede escribir en su forma canónica como $z = a + bi$, donde i es la unidad imaginaria $i = \sqrt{-1}$, se cumple $i^2 = -1$ (Carreño Campos & Cruz Schmidt , 2006).

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA

Geométricamente los número complejos representan un plano cartesiano, donde, en el eje conocido como "x" se debe localizar la parte real de un complejo y en el eje "y" la parte imaginara, así, las coordenadas (a, b) corresponden al complejo $z = a + bi$ (Carreño Campos & Cruz Schmidt , 2006). Visualmente se tiene lo de la imagen 1.

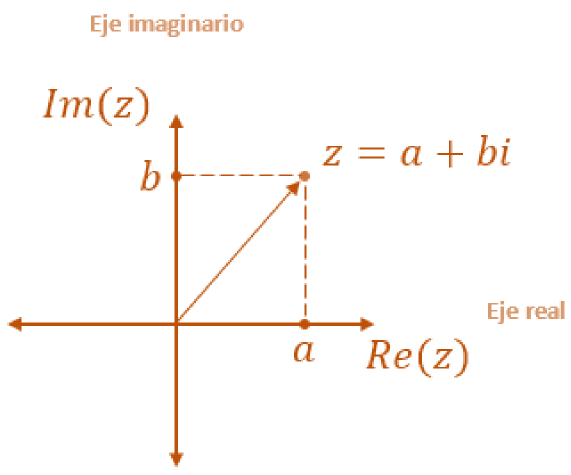

Imagen 1: Representación geométrica de un número complejo.

OPERATORIA CON NÚMEROS COMPLEJOS

SUMA DE NÚMEROS COMPLEJOS

Para sumar complejos hay que sumar las partes reales por un lado y las partes imaginarias por otro lado, tal como sumamos números reales, así nos encontramos con otro número complejo (Rivero Mendoza, 2001), es decir:

Sean $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ luego,

$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

RESTA DE NÚMEROS COMPLEJOS

Al igual que la suma, en la resta de complejos hay que restar las partes reales por un lado y por otro las imaginarias, es decir:

Sean $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ luego,

$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

PRODUCTO DE NÚMEROS COMPLEJOS

El producto de números complejos es similar al de binomios en los números reales, utilizando la propiedad distributiva, reagrupando términos y considerando que $i^2 = -1$, es decir:

Sean $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ luego,

$$
\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= (a + bi) \cdot (c + di) \\
&= ac + adi + bci + bdi^2 \quad \text{Reemplazando } i^2 = -1 \\
&= ac + adi + bci + bd(-1) \quad \text{Agrupando términos semejantes} \\
&= (ac - bd) + (ad + bc)i
\end{aligned}
$$

OPERATORIA CON NÚMEROS COMPLEJOS

DIVISIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS

Para realizar la división de dos complejos z_1 dividido en z_2, **se amplifica por el conjugado de $\boldsymbol{z_2}$**, lo que produce una división por un número real, es decir:

Sean $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ luego,

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di}$ amplificando por $\overline{z_2} = c - di$

$$\frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{ac-adi+bci-bdi^2}{c^2-(di)^2}$$

$$\frac{(ac-bd)+(ad+bc)i}{c^2-(di)^2} = \frac{ac-adi+bci-bd(-1)}{c^2-d^2i^2}$$

$$\frac{(ac-bd)+(ad+bc)i}{c^2-d^2i^2} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2-d^2(-1)}$$

$$\frac{(ac-bd)+(ad+bc)i}{c^2-d^2(-1)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

$$\frac{(ac-bd)+(ad+bc)i}{c^2+d^2} = \frac{(ac+bd)}{c^2+d^2} + \frac{(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

Recordando

El conjugado de un número complejo z, tiene igual parte real, pero su componente imaginaria es opuesta (cambia de signo), se denota por $\bar{z}$.

EJERCICIOS RESUELTOS

A continuación, se presentan ejercicios resueltos con sus procedimientos, en estos se sugiere hacer lo siguiente:

- Lee comprensivamente.
- Revisa el paso a paso.
- Destaca lo que te resulte importante.
- Destaca lo que te genere dudas y luego consulta al tutor.

1. **Sean $z_1 = 1 + 2i$ y $z_2 = 5 + 3i$, efectuar las siguientes operaciones:**
   a) $z_1 + z_2$
   b) $z_1 - z_2$
   c) $z_2 - z_1$
   d) $z_2 \cdot z_1$
   e) $\frac{z_1}{z_2}$

Desarrollo:

a) $$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (1+2i) + (5+3i) \\ &= (1+5) + (2i+3i) \\ &= 6 + 5i \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= (1+2i) - (5+3i) \\ &= (1-5) + (2i-3i) \\ &= -4 - i \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} z_2 - z_1 &= (5+3i) - (1+2i) \\ &= (5-1) + (3i-2i) \\ &= 4 + i \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} z_2 \cdot z_1 &= (5+3i) \cdot (1+2i) \\ &= 5 + 10i + 3i + 6i^2 \\ &= 5 + 13i + 6(-1) \\ &= 5 + 13i - 6 \\ &= -1 + 13i \end{aligned}$$

a) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{(1+2i)}{(5+3i)}$ Amplificamos por el conjugado del denominador

$$= \frac{(1+2i)}{(5+3i)} \cdot \frac{(5-3i)}{(5-3i)}$$

$$= \frac{5-3i+10i-6i^2}{5^2-3^2i^2}$$

$$= \frac{5-3i+10i-6(-1)}{25-9(-1)}$$

$$= \frac{5-3i+10i+6}{25+9}$$

$$= \frac{11+7i}{34}$$

$$= \frac{11}{34} + \frac{7i}{34}$$

2. Calcule $\frac{1}{1+i} - \frac{1}{1-i}$

El primer paso es calcular el mínimo común múltiplo, luego realizar las operaciones señaladas:

$$\frac{1}{1+i} - \frac{1}{1-i} = \frac{1-i-(1+i)}{(1+i)(1-i)}$$

$$= \frac{1-i-1-i}{1^2-i^2}$$

$$= \frac{-2i}{1-(-1)}$$

$$= \frac{-2i}{2}$$

$$= -i$$

PRUEBA TUS CONOCIMIENTOS

A continuación, se presentan ejercicios propuestos para que puedas resolver y practicar, recuerda hacer lo siguiente:

- Resuélvelos siguiendo los pasos utilizados en los problemas resueltos.
- Si es necesario apóyate con los apuntes.
- Si surgen dudas, registrarlas para luego consultar con el tutor.
- ¡Buen trabajo!

1. Sean $z_1 = 4 + 5i$ y $z_2 = 2 - 4i$, efectuar las siguientes operaciones:

a) $z_1 + z_2$

b) $z_1 - z_2$

c) $z_2 - z_1$

d) $z_2 \cdot z_1$

e) $\frac{z_1}{z_2}$

Respuestas

1.

a) $6 + i$

b) $2 + 9i$

c) $-2 - 9i$

d) $28 - 6i$

e) $\frac{-3}{5} + \frac{13}{10}i$

SÍNTESIS

NÚMEROS COMPLEJOS

- Se componen de una parte real y una parte imaginaria.
- Su operatoria es similar a la de binomios de números reales.
- El conjugado de un complejo cambia el signo de la parte imaginaria del complejo.

REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA

Carreño Campos, X., & Cruz Schmidt , X. (2006). *Álgebra* . Santiago : Arrayán Editores S.A.

Rivero Mendoza, F. (2001). *Una Introducción a los Números Complejos.* Mérida.

¿Quieres recibir orientación para optimizar tu estudio en la universidad?

CONTAMOS CON PROFESIONALES EXPERTOS EN
EL APRENDIZAJE QUE TE PUEDEN ORIENTAR

SOLICITA NUESTRO APOYO

Sitio Web de CIMA

Ver más fichas

Solicita más información

TALCA
UNIVERSIDAD
CHILE

CIMA
UNIDAD DE
ACOMPAÑAMIENTO
ESTUDIANTIL