



Fracciones Parciales

MATEMÁTICAS

ruta de aprendizaje

Este documento tiene por objetivo reforzar el contenido de Fracciones Parciales, por lo que su ruta de aprendizaje es la siguiente:



ÍNDICE

- **INTRODUCCIÓN**
- **CONTENIDO**
 - Casos de fracciones parciales
 - Fracciones Impropias
 - Fracciones Propias
 - ¿Cómo se descompone una fracción algebraica según su t de denominador?
- **EJERCICIOS RESUELTOS**
- **PRUEBA TUS CONOCIMIENTOS**
- **RESPUESTAS**
- **SÍNTESIS**
- **REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA**

INTRODUCCIÓN

El método de fracciones parciales fue incluido en el estudio de las matemáticas gracias a John Bernoulli, un matemático suizo que fue clave en el desarrollo inicial del cálculo.

Las **fracciones parciales** son una herramienta muy útil en matemáticas, especialmente en Cálculo y Álgebra y su principal utilidad radica en descomponer fracciones propias complejas en fracciones más simples, las cuales permiten facilitar las expresiones algebraicas con las que se planea trabajar.



FRACCIONES PARCIALES

Recordemos que una **fracción racional** es una fracción en la que tanto el numerador como el denominador son polinomios y podemos generalizar su expresión de la siguiente forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

Considerando lo anterior, podemos identificar las fracciones que tengan en el numerador un polinomio de menor grado que el polinomio del denominador, las cuales denominaremos **Fracciones Propias**. En su contraparte, las **Fracciones Impropias** serán aquellas en las que el grado del numerador es igual o superior al grado del denominador.

La **descomposición en fracciones parciales se puede hacer cuando la fracción es propia**. Para las fracciones impropias se puede proceder dividiendo el polinomio del numerador por el polinomio del denominador.

A continuación, analizaremos la forma de proceder para cada caso.

FRACCIONES IMPROPIAS

Toda fracción impropia se puede expresar como la suma de un polinomio más una fracción propia. Para lograr esto, se divide el polinomio de numerador por el polinomio del denominador.

La descomposición de una fracción impropia tendría la siguiente forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = (\text{Polinomio}) + \frac{N(x)}{Q(x)}$$

En la expresión anterior, el polinomio corresponde al resultado de la división y $N(x)$ es el resto de la división. Posteriormente, la fracción propia $\frac{N(x)}{Q(x)}$ se procede a descomponer según el tipo de denominador que tenga.

Ejemplo: Descomponer la fracción impropia $\frac{x^3}{x+1}$

$\frac{x^3}{x+1}$ es una fracción impropia por lo que se divide su numerador por el denominador

$$\begin{array}{r} x^3 \\ - (x^3 + x^2) \\ \hline -x^2 \\ - (-x^2 - x) \\ \hline x \\ - (x + 1) \\ \hline -1 \end{array} \rightarrow \text{RESTO}$$

La descomposición de la fracción impropia queda expresada de la siguiente forma:

$$\frac{x^3}{x+1} = x^2 - x + 1 + \frac{-1}{x+1}$$

FRACCIONES PROPIAS

En este tipo de fracciones la descomposición dependerá del polinomio obtenido en el denominador después de su factorización. Además, se considera la fracción resultante del proceso de descomposición de una fracción impropia.

Según el tipo de factores obtenidos durante la factorización, se aplicarán diferentes métodos para llevar a cabo la descomposición en fracciones parciales. En esta ficha consideramos los siguientes casos:

- Denominador factorizado en factores lineales distintos.
- Denominador factorizado en factores lineales en los que se puede repetir al menos uno.
- Denominador contiene factores cuadráticos irreducibles distintos.
- Denominador contiene factores irreducibles repetidos.

I) DENOMINADOR FACTORIZADO EN FACTORES LINEALES DISTINTOS

En este caso, el denominador $Q(x)$ se puede escribir de la forma $Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2)...(a_kx + b_k)$, una vez realizada su factorización, teniendo en cuenta que ninguno de estos factores se repite.

Al descomponerse el denominador en distintos factores, se originan constantes $A_1, A_2, \dots, A_k$ las cuales se utilizan para expresar la fracción $\frac{P(x)}{Q(x)}$ (o $\frac{N(x)}{Q(x)}$) como

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(a_1x + b_1)} + \frac{A_2}{(a_2x + b_2)} + \dots + \frac{A_k}{(a_kx + b_k)}$$

Los valores de $A_1, A_2, \dots, A_k$ se determinan mediante sistemas de ecuaciones. Cada ecuación establece una igualdad entre los coeficientes numéricos de cada término de $P(x)$ y sus equivalentes en el numerador de las fracciones parciales descompuestas, una vez se desarrolle la suma o resta de fracciones.

Ejemplo: Descomponer en fracciones parciales $\frac{3x - 5}{x^2 - 3x + 2}$

$$\frac{3x - 5}{x^2 - 3x + 2} = \frac{3x - 5}{(x - 1)(x - 2)}$$

(1) Se factoriza el denominador de la fracción

$$= \frac{A_1}{(x - 1)} + \frac{A_2}{(x - 2)}$$

(2) Se separan las fracciones utilizando cada factor como denominador de una fracción con numerador desconocido.

$$= \frac{A_1(x - 2) + A_2(x - 1)}{(x - 1)(x - 2)}$$

(3) Se suman las fracciones.

$$= \frac{A_1x - 2A_1 + A_2x - A_2}{(x - 1)(x - 2)}$$

(4) Se desarrollan los productos.

$$\frac{3x - 5}{x^2 - 3x + 2} = \frac{(A_1 + A_2)x + (-2A_1 - A_2)}{(x - 1)(x - 2)}$$

(5) Se factorizan los términos de forma que se tengan términos homólogos a la fracción por descomponer.

A partir de la expresión anterior, se construye un sistema de ecuaciones considerando que:

- la primera ecuación corresponde a la igualdad entre los coeficiente de los x .
- La segunda ecuación es la igualdad entre los términos independientes.

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 3 \\ -2A_1 - A_2 &= -5 \end{aligned}$$

Se trabaja con el sistema de ecuaciones para hallar los valores de A_1 y de A_2 para luego reemplazarlos en la fracción (2)

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 3 \\ -2A_1 - A_2 &= -5 \end{aligned}$$

Usando el método de reducción, se suman las ecuaciones para obtener el valor de A_1

$$\begin{aligned} -2A_1 - A_2 + A_1 + A_2 &= -5 + 3 \\ -A_1 &= -2 \quad / \cdot (-1) \\ A_1 &= 2 \end{aligned}$$

Se reemplaza el valor encontrado de A_1 en la primera ecuación para hallar el valor de A_2

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 3 \\ 2 + A_2 &= 3 \quad / -2 \\ A_2 &= 1 \end{aligned}$$

La descomposición de la fracción quedaría de la siguiente forma:

$$\frac{3x - 5}{x^2 - 3x + 2} = \frac{2}{(x - 1)} + \frac{1}{(x - 2)}$$

II) DENOMINADOR FACTORIZADO EN FACTORES LINEALES EN LOS QUE SE PUEDE REPETIR AL MENOS UNO

Si $Q(x)$ tiene un factor lineal repetido k veces de la forma $(a_1x + b_1)^k$, entonces la descomposición en fracciones parciales contiene k términos de la forma:

$$\frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{(a_1x + b_1)^2} + \dots + \frac{A_k}{(a_1x + b_1)^k}$$

Al igual que en el caso anterior $A_1, A_2, \dots, A_k$ son constantes y se determina su valor de la misma forma, es decir, a través de sistemas de ecuaciones.

Ejemplo: Descomponer en fracciones parciales $\frac{2x^2 + 7x + 23}{(x - 1)(x + 3)^2}$

$$\begin{aligned} \frac{2x^2 + 7x + 23}{(x - 1)(x + 3)^2} &= \frac{A_1}{(x - 1)} + \frac{A_2}{(x + 3)} + \frac{A_3}{(x + 3)^2} \\ &= \frac{A_1(x + 3)^2 + A_2(x - 1)(x + 3) + A_3(x - 1)}{(x - 1)(x + 3)^2} \\ &= \frac{A_1(x^2 + 6x + 9) + A_2(x^2 + 2x - 3) + A_3x - A_3}{(x - 1)(x + 3)^2} \\ &= \frac{A_1x^2 + 6xA_1 + 9A_1 + A_2x^2 + 2xA_2 - 3A_2 + A_3x - A_3}{(x - 1)(x + 3)^2} \end{aligned}$$

$$\frac{2x^2 + 7x + 23}{(x - 1)(x + 3)^2} = \frac{(A_1 + A_2)x^2 + (6A_1 + 2A_2 + A_3)x + (9A_1 - 3A_2 - A_3)}{(x - 1)(x + 3)^2}$$

Se separan las fracciones utilizando

(1) cada factor como denominador de una fracción con numerador desconocido.

(2) Se suman las fracciones.

(3) Se desarrollan los productos de los binomios.

(4) Se desarrollan los productos para eliminar paréntesis.

(5) Se factorizan los términos para obtener términos homólogos a la fracción por descomponer.

Se construye el sistema de ecuaciones para luego resolverlo.

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 2 \\ 6A_1 + 2A_2 + A_3 &= 7 \\ 9A_1 - 3A_2 - A_3 &= 23 \end{aligned}$$

1) El sistema consta de tres ecuaciones, por lo que se despejará A_1 de la primera ecuación.

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 2 \\ A_1 &= 2 - A_2 \end{aligned}$$

3) Se resuelve el sistema por reducción sumando directamente las ecuaciones. El valor de A_2 es:

$$\begin{aligned} -4A_2 + A_3 - 12A_2 - A_3 &= -5 \\ -16A_2 &= 0 \\ A_2 &= 0 \end{aligned}$$

5) Por último, se reemplaza los valores encontrados de A_1 y A_2 para identificar el valor de A_3 .

$$\begin{aligned} 6A_1 + 2A_2 + A_3 &= 7 \\ 6 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + A_3 &= 7 \\ A_3 &= -5 \end{aligned}$$

2) Se Sustituye en la segunda y tercera ecuación el valor de A_1 . El resultado es el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} -4A_2 + A_3 &= -5 \\ -12A_2 - A_3 &= 5 \end{aligned}$$

4) Se reemplaza el valor de A_2 para obtener el valor de A_1 .

$$\begin{aligned} A_1 &= 2 - A_2 \\ A_1 &= 2 - 0 \\ A_1 &= 2 \end{aligned}$$

Identificados los valores de A_1, A_2 y A_3 ya se tiene la descomposición de la fracción.

$$\frac{2x^2 + 7x + 23}{(x-1)(x+3)^2} = \frac{2}{(x-1)} + \frac{-5}{(x+3)^2}$$

III) DENOMINADOR CONTIENE FACTORES CUADRÁTICOS IRREDUCTIBLES DISTINTOS

Si $Q(x)$ tiene un factor cuadrático de la forma $ax^2 + bx + c$ que no se puede factorizar (irreducible), entonces la descomposición en fracciones parciales contiene un término de la forma:

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

Donde $b^2 - 4ac < 0$, y los términos A y B son constantes.

Ejemplo: Descomponer la fracción $\frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)}$

En este caso los factores del denominador son irreducibles (no factorizables), entonces se procede de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)} &= \frac{Ax+B}{(x^2+1)} + \frac{Cx+D}{(x^2+2)} \\ &= \frac{(Ax+B)(x^2+2) + (Cx+D)(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+2)} \\ &= \frac{Ax^3 + 2Ax + Bx^2 + 2B + Cx^3 + Cx + Dx^2 + D}{(x^2+1)(x^2+2)} \\ \frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)} &= \frac{(A+C)x^3 + (B+D)x^2 + (2A+C)x + (2B+D)}{(x^2+1)(x^2+2)} \end{aligned}$$

(1) Se reescribe la fracción en fracciones diferentes con sus respectivos denominadores y numeradores a encontrar.

(2) Se suman las fracciones.

(3) Se desarrollan los productos correspondientes.

(4) Se factoriza de acuerdo con la estructura de un polinomio de grado 3.

Igualando los coeficientes correspondientes se tienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{ll} A + C = 0 & 2A + C = 0 \\ B + D = 0 & 2B + D = 1 \end{array}$$

Los valores de A, B, C y D son: A = 0, B = 1, C = 0, D = -1, por lo que la descomposición de la fracción queda expresada como:

$$\frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)} = \frac{1}{(x^2 + 1)} - \frac{1}{(x^2 + 2)}$$

IV) DENOMINADOR CONTIENE FACTORES IRREDUCTIBLES REPETIDOS

Si $Q(x)$ tiene un factor cuadrático de la forma $(ax^2 + bx + c)^k$, el cual, puede estar repetido k veces, entonces la descomposición en fracciones parciales contiene k términos de la forma:

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{A_kx + B_k}{(ax^2 + bx + c)^k}$$

Donde $b^2 - 4ac < 0$, y los términos $A_1, A_2, \dots, A_k$ y $B_1, B_2, \dots, B_k$ son constantes.

Ejemplo: Descomponer en fracciones parciales $\frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2 + 1)^2}$

La descomposición de esta fracción se trabaja de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2 + 1)^2} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{(x^2 + 1)} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 1)^2} & (1) \text{ Se reescribe la fracción en fracciones diferentes con sus respectivos denominadores y numeradores a encontrar.} \\ &= \frac{A(x^2 + 1)^2 + x(Bx + C)(x^2 + 1) + x(Dx + E)}{x(x^2 + 1)^2} & (2) \text{ Se suman las fracciones.} \end{aligned}$$

Se desarrollan los productos correspondientes y después de igualar coeficientes se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{lll} A + B = 0 & 2A + B + D = 2 & C = -1 \\ 2A + B + D = 2 & C + E = -1 & A = 1 \end{array}$$

Los valores de A, B, C, D y E son: A = 1, B = -1, C = -1, D = 1 y E = 0, por lo que la descomposición queda expresada como:

$$\frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2 + 1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{x + 1}{(x^2 + 1)} + \frac{x}{(x^2 + 1)^2}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

EJERCICIO

Si para todo $n \neq 1$, se cumple que $\frac{1}{n^2 - 1} = \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n-1}$.
Calcular $A + B$.

De la descomposición parcial mostrada:

$$\frac{8x - 11}{2x^2 + 5x - 3} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{2x-1}$$

Calcular el valor de $A + B$.

SOLUCIÓN

Sumando las fracciones tenemos:

$$\frac{1}{n^2 - 1} = \frac{A(n-1) + B(n+1)}{(n+1)(n-1)} = \frac{An - A + Bn + B}{(n+1)(n-1)} = \frac{(A+B)n + (B-A)}{(n+1)(n-1)}$$

De donde:

$$A + B = 0$$

$$B - A = 1$$

Por lo tanto, la respuesta al ejercicio es $A + B = 0$

Efectuando la suma de las fracciones y factorizando se tiene:

$$\frac{8x - 11}{2x^2 + 5x - 3} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{2x-1} = \frac{A(2x-1) + B(x+3)}{(x+3)(2x-1)} = \frac{2xA - A + Bx + 3B}{(x+3)(2x-1)} = \frac{(2A+B)x + (-A+3B)}{(x+3)(2x-1)}$$

Se tiene que resolver el sistema formado por las ecuaciones
$$\begin{array}{l} 2A + B = 8 \\ -A + 3B = -11 \end{array}$$

$A = 5$ y $B = -2$, por lo que $A + B = 5 - 2 = 3$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Identificar si las siguientes fracciones son propias o impropias:

a) $\frac{x+2}{x^2-7x+12}$

b) $\frac{x^3}{x^2-4}$

c) $\frac{2x^3+6x-9}{x^2-3x+2}$

2) Descomponer las siguientes fracciones en fracciones parciales:

a) $\frac{x+2}{2x^2-7x-15}$

b) $\frac{3x^2-4x+5}{(x-1)(x^2+1)}$

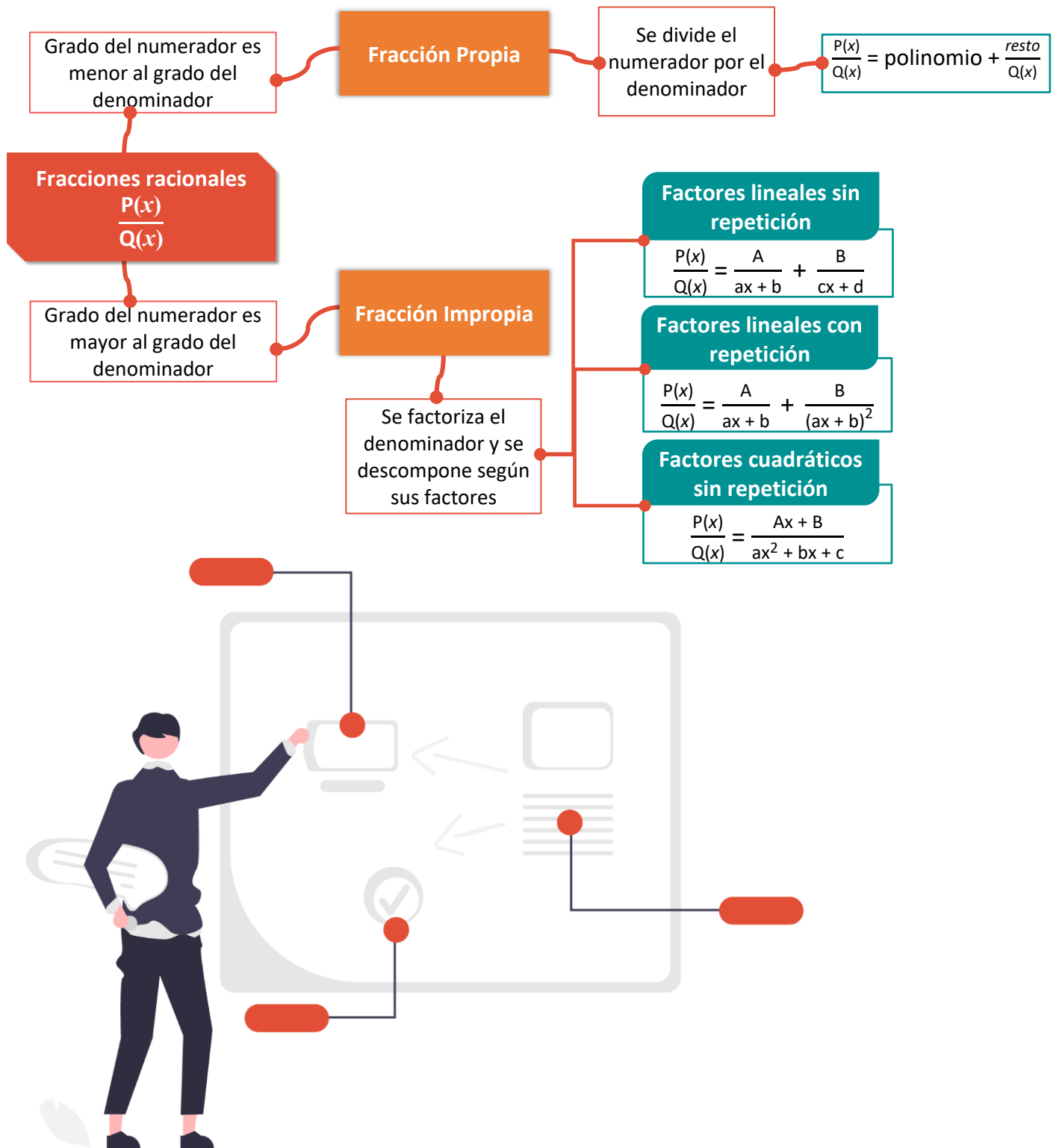
Respuestas:

1) a) Propia b) Impropia c) Impropia

2) a) $\frac{-1}{13(2x+3)} + \frac{7}{13(x-5)}$ b) $\frac{2}{x-1} + \frac{x-3}{x^2+1}$



SÍNTESIS



¿CÓMO PUEDO REVISAR MIS RESULTADOS?

Existen distintas apps que nos pueden ayudar a resolver nuestras dudas si no podemos dar con el procedimiento de un ejercicio. En esta ocasión, te presentamos una calculadora online en la que podrás identificar el paso a paso del proceso de descomposición a la cual puedes acceder a través del código QR.



Calculadora de descomposición de fracciones parciales

Encuentra fracciones parciales paso a paso

Esta calculadora en línea encontrará la descomposición en fracciones parciales de la función racional, con los pasos que se muestran.

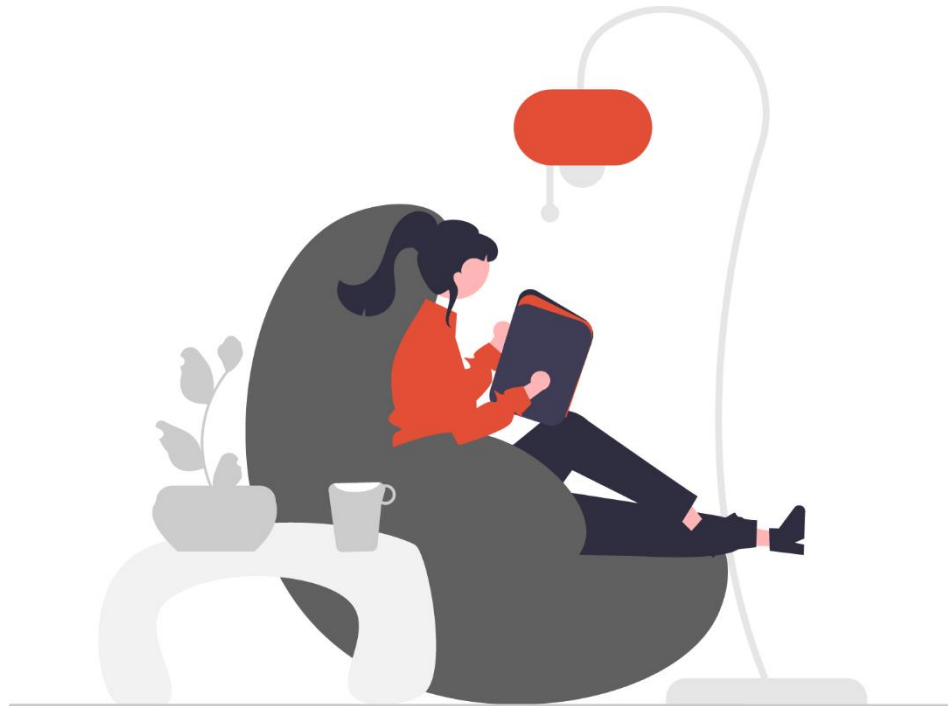
Link: <https://www.emathhelp.net/es/calculators/algebra-2/partial-fraction-decomposition-calculator/>

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Flores, M. (2007). *Álgebra: teoría y práctica* (1ª ed.). [San Marcos]

Spiegel, M. R. (2007). *Álgebra superior* (3ª ed.). [Serie Schaum]

Swokowski, E. W., & Cole, J. A. (2009). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica* (12ª ed.). [Cengage Learning]





¿Quieres recibir orientación para optimizar tu estudio en la universidad?

CONTAMOS CON PROFESIONALES EXPERTOS EN
EL APRENDIZAJE QUE TE PUEDEN ORIENTAR

SOLICITA NUESTRO APOYO



Sitio Web de CIMA



Ver más fichas



Solicita más información