TALCA UNIVERSIDAD CHILE

Lógica Proposicional

MATEMÁTICAS

PACE Programa de Acceso a la Educación Superior
Subsecretaría de Educación Superior

CIMA UNIDAD DE ACOMPAÑAMIENTO ESTUDIANTIL

RUTA DE APRENDIZAJE

- Este documento tiene por objetivo exponer elementos básicos de la lógica proposicional, incluyendo las leyes del álgebra de proposiciones que permiten demostrar equivalencias.

Álgebra → Teoría de Conjuntos → Logística proposicional

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

La lógica proposicional forma parte importante en la axiomatización y rigurosidad de la matemática que conocemos actualmente.

Con aportes de famosos matemáticos como Gottfried Leibniz, George Boole y Augustus de De Morgan, la lógica se volvió una herramienta de incalculable valor a la hora de desarrollar conocimiento en esta disciplina, transformándose a la vez en parte obligatoria de la malla curricular de cualquier Ingeniería.

ENUNCIADOS LÓGICOS

Los enunciados o aserciones verbales se denotan usualmente por las letras p, q, r. El carácter fundamental de un enunciado es que, o bien es verdadero, o bien es falso, pero no ambas cosas. La verdad o falsedad de un enunciado se llama valor de verdad.

Existen enunciados simples y compuestos, siendo estos últimos aquellos que están formados de enunciados simples y de varias conectivas.

Ejemplos:

Las rosas son rojas y las violetas son azules

Es un enunciado compuesto formado por los enunciados simples: "Las rosas son rojas" y "Las violetas son azules".

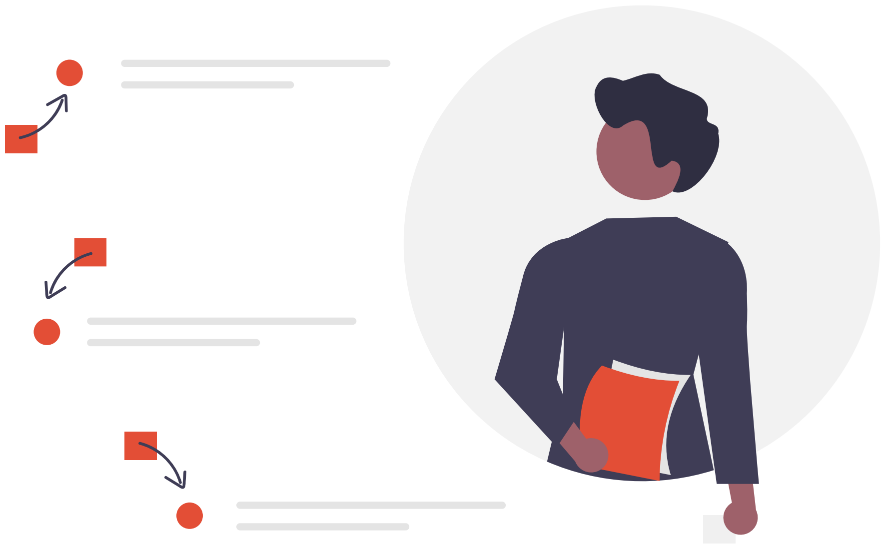
¿Dónde vas?

No es un enunciado, pues no es ni verdadero ni falso.

Juan está enfermo o viejo

Es un enunciado formado implícitamente por los enunciados simples "Juan está viejo" y "Juan está enfermo"

La propiedad fundamental de los enunciados compuestos es que **su valor de verdad está determinado por completo por el valor de verdad de cada uno de los enunciados simples y por el modo como se les reúne para formar el enunciado compuesto**.



OPERADORES LÓGICOS

Conjunción $\boldsymbol{p \wedge q}$

Dos enunciados cualesquiera se pueden combinar por medio de la palabra “y” para formar un enunciado compuesto, que se llama *conjunción* de los primeros dos enunciados. Simbólicamente se denota la conjunción de dos enunciados p y q por

$$\boxed{p \wedge q}$$

Sea p “Está lloviendo” y sea q “El sol brilla”, entonces $\boldsymbol{p \wedge q}$ denota el enunciado compuesto “Está lloviendo y el sol brilla”

El valor de verdad del enunciado compuesto $\boldsymbol{p \wedge q}$ satisface la condición siguiente:

> Si p es verdadero y q es verdadero, entonces $\boldsymbol{p \wedge q}$ es verdadero; en otro caso $\boldsymbol{p \wedge q}$ es falso.

Es decir, la conjunción de dos enunciados es verdadera solamente si cada componente es verdadero.

Como ejemplo considere los siguientes enunciados

1. París está en Francia y $2 + 2 = 5$.
2. París está en Inglaterra y $2 + 2 = 4$.
3. París está en Inglaterra y $2 + 2 = 5$.
4. París está en Francia y $2 + 2 = 4$.

De todas las proposiciones, solo 4 es verdadera, y todos los demás enunciados son falsos pues al menos uno de sus componentes es falso.

La tabla de verdad para la conjunción es la siguiente

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disyunción $\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$

Dos enunciados se pueden combinar por medio de la palabra "o" para formar un nuevo enunciado que se llama disyunción de los dos enunciados previos. Simbólicamente se denota la disyunción de dos enunciados p y q por

$$\boxed{p \vee q}$$

Sea p "Él estudió francés en la universidad", y sea q "Él vivió en Francia", entonces $\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$ es el enunciado "Él estudió francés en la universidad o él vivó en Francia".

El valor de verdad del enunciado compuesto $\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$ cumple la condición siguiente:

Si p es verdadero o q es verdadero, o ambos p y q son verdaderos, entonces $\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$ es verdadero; en otro caso $p \vee q$ es falso.

Es decir, la disyunción de dos enunciados es falsa solamente si cada enunciado componente es falso. Lo anterior lo resume la siguiente tabla de verdad

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Como ejemplo, considere los siguientes enunciados:

1. París está en Francia o $2 + 2 = 5$.
2. París está en Inglaterra o $2 + 2 = 4$.
3. París está en Francia o $2 + 2 = 4$.
4. París está en Inglaterra o $2 + 2 = 5$.

Solo 4 es falso. Cada uno de los otros enunciados es verdadero, pues al menos uno de los componentes es verdadero.

Negación $\overline{p}$

Dado un enunciado p, se puede formar otro enunciado, que se llama *negación de* p, escribiendo "Es falso que…" antes de p o, cuando es posible, insertando en p la palabra "no". Simbólicamente se denota la negación por

$$\boxed{\overline{p}}$$

Considere los tres enunciados siguientes

1. París está en Francia
2. Es falso que París está en Francia
3. París no está en Francia

Entonces 2 y 3 son cada uno negación de 1.

El valor de verdad de la negación de un enunciado depende de la siguiente condición:

> Si p es verdadero entonces $\bar{p}$ es falso, si p es falso $\bar{p}$ es verdadero.

La tabla de verdad para la negación es la siguiente

p	$\bar{p}$
V	F
F	V

Importante: existen diversos símbolos para la negación de un enunciado p, por ejemplo $\bar{p}, \sim p, \neg p$.

Condicional $p \longrightarrow q$

Muchos enunciados, especialmente en matemática, son de la forma "Si p entonces q". Tales enunciados se llaman condicionales y se les denota por

$$\boxed{p \longrightarrow q}$$

El condicional $\boldsymbol{p \longrightarrow q}$ se puede también leer

a) p implica q
b) p solamente si q
c) p es suficiente para q
d) q es necesario para p

El valor de verdad del enunciado condicional $\boldsymbol{p \longrightarrow q}$

El condicional $\boldsymbol{p \longrightarrow q}$ es verdadero a menos que p sea verdadero y q sea falso. Es decir, un enunciado verdadero no puede implicar uno falso

La tabla de verdad del condicional es la siguiente

p	q	$p \longrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Sean los siguientes enunciados

1. Si parís está en Francia, entonces $2 + 2 = 5$
2. Si París está en Inglaterra, entonces $2 + 2 = 4$
3. Si París está en Francia, entonces $2 + 2 = 4$
4. Si París está en Inglaterra, entonces $2 + 2 = 5$

Aquí solo 1 es falso, los otros son verdaderos.

Bicondicional $\boldsymbol{p \longleftrightarrow q}$

Otro enunciado corriente es de la forma "p si, y solamente si, q" o de forma abreviada "p si q". Tales enunciados se llaman bicondicionales y se les denota por:

$$\boxed{p \leftrightarrow q}$$

El valor de verdad de los enunciados bicondicionales $\boldsymbol{p \longleftrightarrow q}$ obedecen a la condición

Si p y q tienen el mismo valor de verdad, entonces $\boldsymbol{p \longleftrightarrow q}$ es verdadero; si p y q tienen valores de verdad opuestos, entonces $\boldsymbol{p \longleftrightarrow q}$ es falso.

Sean los enunciados:

1. París está en Francia si, y solamente si $2+2=5$
2. París está en Inglaterra si, y solamente si $2+2=4$
3. París está en Francia si, y solamente si $2+2=4$
4. París está en Inglaterra si, y solamente si $2+2=5$

Aquí 3 y 4 son verdaderos, 1 y 2 son falsos

Para expresar que una proposición es equivalente con otra se utiliza el símbolo ≡ que se lee equivalente a, y tal equivalencia se puede probar usando tablas de verdad o el *álgebra de proposiciones*.

LEYES DEL ÁLGEBRA DE PROPOSICIONES

Leyes de idempotencia

$P \vee P \equiv P$ $\qquad$ $P \wedge P \equiv P$

Leyes asociativas

$(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$ $\qquad$ $(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$

Leyes conmutativas

$P \vee Q \equiv Q \vee P$ $\qquad$ $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$

Leyes distributivas

$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ $\qquad$ $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

Leyes de identidad

$P \vee V \equiv V$ $\qquad$ $P \wedge V \equiv P$

$P \vee F \equiv P$ $\qquad$ $P \wedge F \equiv F$

Leyes del complemento

$P \vee \overline{P} \equiv V$ $\qquad$ $P \wedge \overline{P} \equiv F$

$\overline{\overline{P}} \equiv P$ $\qquad$ $\overline{V} \equiv F, \quad \overline{F} \equiv V$

Leyes de De Morgan

$\overline{(P \vee Q)} \equiv \overline{P} \wedge \overline{Q}$ $\qquad$ $\overline{(P \wedge Q)} \equiv \overline{P} \vee \overline{Q}$

Otra importante ley que permitirá simplificar expresiones es la llamada Ley de absorción

$$P \vee (P \wedge Q) \equiv P \qquad\qquad P \wedge (P \vee Q) \equiv P$$

Además, tanto una implicancia como un bicondicional se pueden transformar de la siguiente manera:

$$P \Rightarrow Q \equiv \overline{P} \vee Q \qquad\qquad P \Leftrightarrow Q \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$$

EJERCICIOS RESUELTOS

Para demostrar usando el álgebra de proposiciones, se recomienda trabajar desde el lado que contenga más términos e intentar formar el otro lado, siempre haciendo uso del álgebra de proposiciones y cambiando expresiones por otras lógicamente equivalentes.

1) Prueba la siguiente equivalencia

$\overline{(p \vee (\bar{p} \wedge q)\,)} \equiv \bar{p} \wedge \bar{q}$

$\overline{(p \vee (\bar{p} \wedge q)\,)} \equiv \bar{p} \wedge \overline{(\bar{p} \wedge q)}$	Ley de De Morgan
$\equiv \bar{p} \wedge (\bar{\bar{p}} \vee \bar{q})$	Ley de De Morgan
$\equiv \bar{p} \wedge (p \vee \bar{q})$	Ley del complemento
$\equiv (\bar{p} \wedge p) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})$	Ley distributiva
$\equiv F \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})$	Ley del complemento
$\equiv \bar{p} \wedge \bar{q}$	Ley de Identidad

2) Demuestre la siguiente equivalencia

$[(p \Leftrightarrow \bar{q}) \wedge (q \wedge \bar{p})] \equiv \overline{(q \Longrightarrow p)}$

Para esta demostración, obtengamos una expresión equivalente para el lado derecho

$\overline{(q \Longrightarrow p)} \equiv \overline{(\bar{q} \vee p)}$	Use $A \Longrightarrow B \equiv \bar{A} \vee B$
$\equiv \bar{\bar{q}} \wedge \bar{p}$	Ley de De Morgan
$\equiv q \wedge \bar{p}$	Ley del complemento

Es decir, debemos probar que

$[(p \Leftrightarrow \bar{q}) \wedge (q \wedge \bar{p})] \equiv q \wedge \bar{p}$

Procedamos de izquierda a derecha

$$\begin{aligned}
[(p \Leftrightarrow \bar{q}) \wedge (q \wedge \bar{p})] &\equiv (p \Longrightarrow \bar{q}) \wedge (\bar{q} \Longrightarrow p) \wedge (q \wedge \bar{p}) && \text{Use } A \Leftrightarrow B \equiv (A \Longrightarrow B) \wedge (B \Longrightarrow A) \\
&\equiv (\bar{p} \vee \bar{q}) \wedge (\bar{\bar{q}} \vee p) \wedge (q \wedge \bar{p}) && \text{Use } A \Longrightarrow B \equiv \bar{A} \vee B \\
&\equiv (\bar{p} \vee \bar{q}) \wedge (q \vee p) \wedge (q \wedge \bar{p}) && \text{Ley del complemento} \\
&\equiv (\bar{p} \vee \bar{q}) \wedge [q \vee (p \wedge \bar{p})] && \text{Ley distributiva} \\
&\equiv (\bar{p} \vee \bar{q}) \wedge [q \vee F] && \text{Ley del complemento} \\
&\equiv (\bar{p} \vee \bar{q}) \wedge q && \text{Ley de identidad} \\
&\equiv (\bar{p} \wedge q) \vee (\bar{q} \wedge q) && \text{Ley distributiva} \\
&\equiv (\bar{p} \wedge q) \vee F && \text{Ley del complemento} \\
&\equiv \bar{p} \wedge q && \text{Ley de identidad}
\end{aligned}$$

3) Demuestre que la siguiente equivalencia es una tautología, es decir, que es equivalente con verdadero

$p \vee q \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}) \equiv \boldsymbol{V}$

Procedamos de izquierda a derecha

$$\begin{aligned}
p \vee q \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}) &\equiv p \vee [q \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})] && \text{Ley asociativa} \\
&\equiv p \vee [(q \vee \bar{p}) \wedge (q \vee \bar{q})] && \text{Ley distributiva} \\
&\equiv p \vee [(q \vee \bar{p}) \wedge \boldsymbol{V}] && \text{Ley del complemento} \\
&\equiv p \vee [(q \vee \bar{p})] && \text{Ley de identidad} \\
&\equiv (p \vee \bar{p}) \vee q && \text{Ley conmutativa y asociativa} \\
&\equiv \boldsymbol{V} \vee q && \text{Ley del complemento} \\
&\equiv \boldsymbol{V} && \text{Ley de identidad}
\end{aligned}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

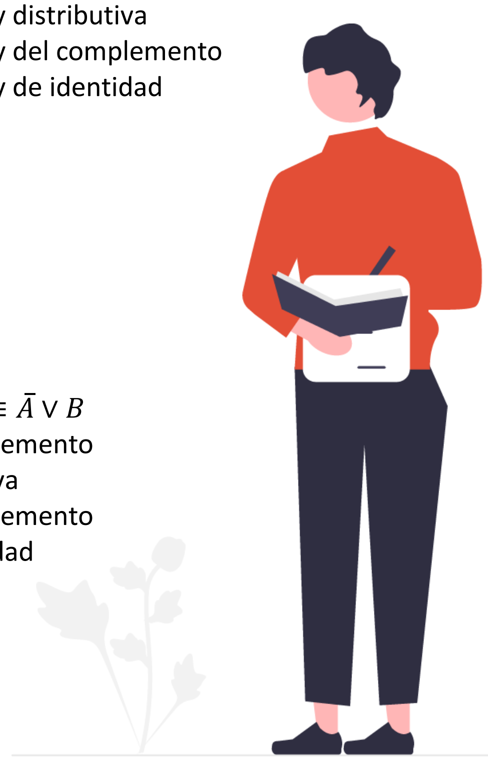
1) Demuestra la siguiente equivalencia de izquierda a derecha

$[p \lor (\bar{q} \land \bar{p})] \land (\bar{p} \lor \bar{q}) \equiv \bar{q}$

Te sugerimos una propiedad a la derecha para que puedas aplicar

$[p \lor (\bar{q} \land \bar{p})] \land (\bar{p} \lor \bar{q}) \equiv [(p \lor \bar{q}) \land (p \lor \bar{p})] \land (\bar{p} \lor \bar{q})$ Ley distributiva

Ley del complemento
Ley de identidad
Ley distributiva
Ley del complemento
Ley de identidad



2) Demuestre la siguiente identidad

$[(p \Longrightarrow q) \land (\bar{p} \Longrightarrow q)] \equiv q$

Te sugerimos demostrar de izquierda a derecha

$[(p \Longrightarrow q) \land (\bar{p} \Longrightarrow q)] \equiv (\bar{p} \lor q) \land (\bar{\bar{p}} \lor q)$ Use $A \Longrightarrow B \equiv \bar{A} \lor B$

Ley del complemento
Ley distributiva
Ley del complemento
Ley de identidad

3) Demuestre la siguiente igualdad

$[(p \land \bar{q}) \lor (p \land r)] \Longrightarrow (q \land r) \equiv p \Longrightarrow q$

Comencemos de izquierda a derecha

$[(p \land \bar{q}) \lor (p \land r)] \Longrightarrow (q \land r) \equiv [p \land (\bar{q} \lor r)] \Longrightarrow (q \land r)$ Ley distributiva

Use $A \Longrightarrow B \equiv \bar{A} \lor B$
Ley de De Morgan
Ley de De Morgan
Ley del complemento
Ley asociativa
Ley distributiva
Ley del complemento
Ley de identidad
Use $A \Longrightarrow B \equiv \bar{A} \lor B$

SOLUCIONARIO

1) Demuestra la siguiente equivalencia de izquierda a derecha

$[p \vee (\bar{q} \wedge \bar{p})] \wedge (\bar{p} \vee \bar{q}) \equiv \bar{q}$

Te sugerimos una propiedad a la derecha para que puedas aplicar

$$
\begin{array}{rll}
[p \vee (\bar{q} \wedge \bar{p})] \wedge (\bar{p} \vee \bar{q}) & \equiv [(p \vee \bar{q}) \wedge (p \vee \bar{p})] \wedge (\bar{p} \vee \bar{q}) & \text{Ley distributiva} \\
& \equiv [(p \vee \bar{q}) \wedge \boldsymbol{V}] \wedge (\bar{p} \vee \bar{q}) & \text{Ley del complemento} \\
& \equiv (p \vee \bar{q}) \wedge (\bar{p} \vee \bar{q}) & \text{Ley de identidad} \\
& \equiv (p \wedge \bar{p}) \vee \bar{q} & \text{Ley distributiva} \\
& \equiv F \vee \bar{q} & \text{Ley del complemento} \\
& \equiv \bar{q} & \text{Ley de identidad}
\end{array}
$$

2) Demuestre la siguiente identidad

$[(p \Longrightarrow q) \wedge (\bar{p} \Longrightarrow q)] \equiv q$

Te sugerimos demostrar de izquierda a derecha

$$
\begin{array}{rll}
[(p \Longrightarrow q) \wedge (\bar{p} \Longrightarrow q)] & \equiv (\bar{p} \vee q) \wedge (\bar{\bar{p}} \vee q) & \text{Use } A \Longrightarrow B \equiv \bar{A} \vee B \\
& \equiv (\bar{p} \vee q) \wedge (p \vee q) & \text{Ley del complemento} \\
& \equiv (\bar{p} \wedge p) \vee q & \text{Ley distributiva} \\
& \equiv F \vee q & \text{Ley del complemento} \\
& \equiv q & \text{Ley de identidad}
\end{array}
$$

3) Demuestre la siguiente igualdad

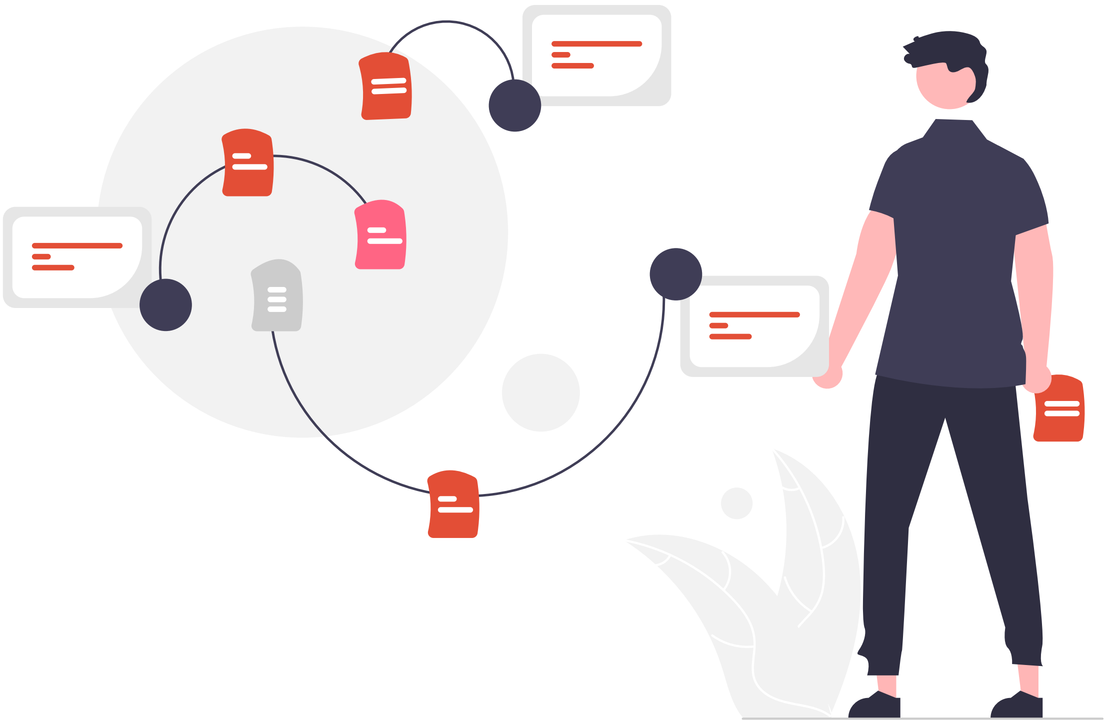
$[(p \wedge \bar{q}) \vee (p \wedge r)] \Longrightarrow (q \wedge r) \equiv p \Longrightarrow q$

$$
\begin{array}{rll}
[(p \wedge \bar{q}) \vee (p \wedge r)] \Longrightarrow (q \wedge r) & \equiv [p \wedge (\bar{q} \vee r)] \Longrightarrow (q \wedge r) & \text{Ley distributiva} \\
& \equiv \overline{[p \wedge (\bar{q} \vee r)]} \vee (q \wedge r) & \text{Use } A \Longrightarrow B \equiv \bar{A} \vee B \\
& \equiv [\bar{p} \vee \overline{(\bar{q} \vee r)}] \vee (q \wedge r) & \text{Ley de De Morgan} \\
& \equiv [\bar{p} \vee (\bar{\bar{q}} \wedge \bar{r})] \vee (q \wedge r) & \text{Ley de De Morgan} \\
& \equiv [\bar{p} \vee (q \wedge \bar{r})] \vee (q \wedge r) & \text{Ley del complemento} \\
& \equiv \bar{p} \vee [(q \wedge \bar{r}) \vee (q \wedge r)] & \text{Ley asociativa} \\
& \equiv \bar{p} \vee [q \wedge (\bar{r} \vee r)] & \text{Ley distributiva} \\
& \equiv \bar{p} \vee [q \wedge \boldsymbol{V}] & \text{Ley del complemento} \\
& \equiv \bar{p} \vee q & \text{Ley de identidad} \\
& \equiv p \Longrightarrow q & \text{Use } A \Longrightarrow B \equiv \bar{A} \vee B
\end{array}
$$

SÍNTESIS

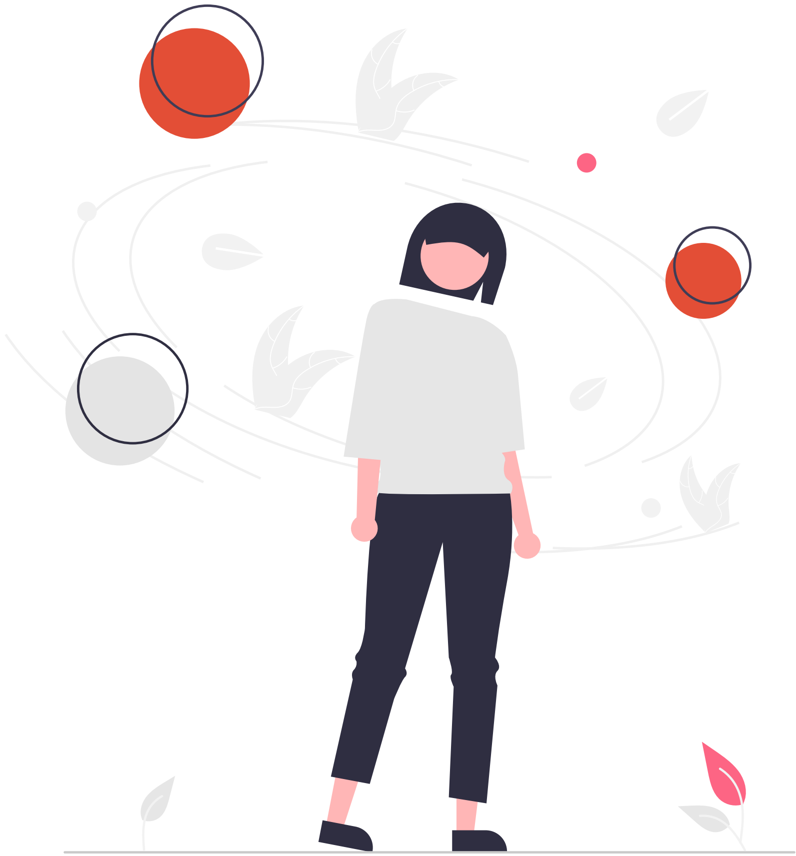
La lógica proposicional es parte fundamental de la matemática moderna. Para realizar demostraciones es posible usar tablas de verdad, pero también se puede empleando la llamada álgebra proposicional.

Demostrar una equivalencia usando álgebra proposicional consiste en llegar de un lado al otro de la equivalencia, cambiando expresiones por otras que sean lógicamente equivalentes.



BIBLIOGRAFIA

Lipschutz, S. (1991). Teoría de conjuntos y temas afines. Mc Graw Hill.



¿Quieres recibir orientación para optimizar tu estudio en la universidad?

CONTAMOS CON PROFESIONALES EXPERTOS EN
EL APRENDIZAJE QUE TE PUEDEN ORIENTAR

SOLICITA NUESTRO APOYO

Sitio Web de CIMA

Ver más fichas

Solicita más información

PACE Programa de Acceso a la Educación Superior
Subsecretaría de Educación Superior

CIMA UNIDAD DE ACOMPAÑAMIENTO ESTUDIANTIL